MC. 15 – AUTOEVALUARE

Cuprins

Capitolul 1

MC. 01 – Noţiuni fundamentale de teoria mulţimilor

1.1 Exerciţii rezolvate

Exerciţiul 1.1.1. *Fie* $A, B \subset \mathbb{R}$ *şi* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Se consideră mulţimile:*

$$\begin{cases} \lambda A & = & \{\lambda x \,|\, x \in A\}; \\ A + B & = & \{x + y \,|\, x \in A,\, y \in B\}; \\ A \cdot B & = & \{xy \,|\, x \in A,\, y \in B\}. \end{cases}$$

Să se arate că dacă A *şi* B *sunt mulţimi mărginite atunci* λA, $A + B$ *şi* $A \cdot B$ *sunt mărginite şi, în plus,*

a$_1$) $\inf(\lambda A) = \begin{cases} \lambda \inf A, & \lambda > 0 \\ 0, & \lambda = 0 \\ \lambda \sup A, & \lambda < 0 \end{cases}$

a$_2$) $\sup(\lambda A) = \begin{cases} \lambda \sup A, & \lambda > 0 \\ 0, & \lambda = 0 \\ \lambda \inf A, & \lambda < 0 \end{cases}$

b) $\inf A + \inf B = \inf(A + B) \leq \sup(A + B) = \sup A + \sup B$

c) *dacă* $A, B \subset [0, \infty)$ *atunci* $(\inf A)(\inf B) = \inf(A \cdot B) \leq \sup(A \cdot B) = (\sup A)(\sup B)$.

Soluţie. **a**$_1$). Considerăm $\lambda > 0$ şi fie $\alpha = \inf A$. Folosind caracterizarea marginii inferioare cu inegalităţi, avem:

- $\forall x \in A$ cu $\alpha \leq x \Longrightarrow \lambda\alpha \leq \lambda x$;
- $\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, x_\varepsilon$ astfel încât $x_\varepsilon < \alpha + \dfrac{\varepsilon}{\lambda} \implies \lambda x_\varepsilon < \lambda\alpha + \varepsilon$,

de unde deducem $\lambda\alpha = \inf(\lambda A)$.

Dacă $\lambda = 0$ atunci $\lambda A = \{0\}$ şi $\inf(\{0\}) = 0$.

În cazul $\lambda < 0$, folosind iarăşi caracterizarea cu inegalităţi a marginii inferioare $\alpha = \inf A$, avem:

- $\forall\, x \in A,\ \alpha \leq x \Longrightarrow \lambda\alpha \geq \lambda x$;

- $\forall\varepsilon > 0,\ \exists x_\varepsilon$ astfel încât $x_\varepsilon < \alpha - \dfrac{\varepsilon}{\lambda} \implies \lambda x_\varepsilon > \lambda\alpha - \varepsilon$

din care rezultă $\lambda\alpha = \sup(\lambda A)$.

Demonstraţia pentru **a**$_2$) este similară.

b). Fie $m_A = \inf A$ şi $m_B = \inf B$. Deci $m_A \le a, \forall\, a \in A$ şi $m_B \le b, \forall\, b \in B$ adică $m_A + m_B \le a + b$. Apoi $\forall\varepsilon > 0, \exists\, a_\varepsilon \in A$ astfel încât $a_\varepsilon < m_A + \dfrac{\varepsilon}{2}$ şi $\forall\varepsilon > 0, \exists\, b_\varepsilon \in B$ astfel încât $b_\varepsilon < m_B + \dfrac{\varepsilon}{2}$ din care deducem $a_\varepsilon + b_\varepsilon < m_A + m_B + \varepsilon$. Cum $\forall\varepsilon > 0$ a fost ales arbitrar de mic rezultă că $\inf A + \inf B = \inf\,(A + B)$.

La fel se demonstrează că $\sup A + \sup B = \sup\,(A + B)$.

c). Fie $\alpha = \sup A$ şi $\beta = \sup B$. Dacă $\alpha\cdot\beta = 0$ atunci $A = \{0\}$ sau $B = \{0\}$ şi atunci $\sup\,(A\cdot B) = (\sup A)(\sup B)$.

Dacă $\alpha\cdot\beta > 0$ şi x este element arbitrar al mulţimii $A\cdot B$, atunci $x = a\cdot b$, unde $0 \le a \le \alpha$ şi $0 \le b \le \beta$ implică

$$0 \le x \le \alpha\cdot\beta, \quad \forall\, x \in A\cdot B,$$

deci prima inegalitate ce caracterizează marginea superioară a mulţimii $A\cdot B$ este îndeplinită.

Fie acum $\varepsilon > 0$ cu $\varepsilon < 2\alpha\cdot\beta$. Atunci există $a_\varepsilon \in A$ şi $b_\varepsilon \in B$ astfel încât $a_\varepsilon > \alpha - \dfrac{\varepsilon}{2\beta}$ şi $b_\varepsilon > \beta - \dfrac{\varepsilon}{2\alpha}$. Produsul acestor numere $x_\varepsilon = a_\varepsilon\cdot b_\varepsilon$ are proprietatea

$$x_\varepsilon > \alpha\cdot\beta - \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{4\alpha\cdot\beta} > \alpha\cdot\beta - \varepsilon$$

care arată că şi cea de a doua inegalitate care caracterizează marginea superioară a mulţimii $A\cdot B$ este îndeplinită. Prin urmare $\alpha\cdot\beta = \sup\,(A\cdot B)$, adică

$$\sup\,(A\cdot B) = \sup A\cdot\sup B,$$

ceea ce trebuia de demonstrat.

Cealaltă parte a demonstraţiei este identică. ■

Exerciţiul 1.1.2. *Fie $a \in I\!\!R$ fixat. Să se arate că pentru orice număr $q \ge 1$ întreg există $p \in \mathbb{Z}$ astfel încât $\left|a - \dfrac{p}{q}\right| < \dfrac{1}{q}$. Folosind acest rezultat să se demonstreze că orice număr real este limita unui şir de numere raţionale.*

Soluţie. Fie $q \in I\!\!N^*$, fixat. Intervalele de forma $\left[\dfrac{p}{q}, \dfrac{p+1}{q}\right)$, cu $p \in \mathbb{Z}$ determină o **partiţie** a mulţimii numerelor reale. Alegem atunci p astfel încât $\dfrac{p}{q} \le a < \dfrac{p+1}{q}$, deci $\left|a - \dfrac{p}{q}\right| < \dfrac{1}{q}$. Dacă punem $q = n$ şi notăm $\dfrac{p}{q} = r_n$ rezultă $|a - r_n| < \dfrac{1}{n}$ deci $r_n \to a$. ■

Exerciţiul 1.1.3. *Fie $f : X \to Y$ o aplicaţie. Atunci avem*

a) f ***injectivă*** $\iff \forall A_1, A_2 \subseteq X$ *cu* $f(A_1) \subseteq f(A_2)$ *rezultă* $A_1 \subseteq A_2$;

b) f ***surjectivă*** $\iff \forall B_1, B_2 \subseteq Y$ *cu* $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$ *rezultă* $B_1 \subseteq B_2$.

Soluţie. **a**). " $\Rightarrow$ ". Fie $A_1, A_2 \subseteq X$ fixate şi $f(A_1) \subseteq f(A_2)$. Atunci

$$\forall x_1 \in A_1 \Longrightarrow f(x_1) \in f(A_1) \subseteq f(A_2), \quad \text{deci} \quad \exists\, x_2 \in A_2 \quad \text{cu} \quad f(x_1) = f(x_2)$$

şi cum f este injectivă rezultă $x_1 = x_2$, adică $A_1 \subseteq A_2$.

" $\Leftarrow$ ". Fie $x_1, x_2 \in X$ cu $f(x_1) = f(x_2)$. Atunci $f(\{x_1\}) \subseteq f(\{x_2\})$ deci $\{x_1\} \subseteq \{x_2\}$, adică $x_1 = x_2$. Prin urmare f este funcţie injectivă.

b). " $\Rightarrow$ ". Fie $B_1, B_2 \subseteq Y$ fixate şi $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$. Atunci

$$\forall y_1 \in B_1,\ \exists x_1 \in X \quad \text{cu} \quad f(x_1) = y_1 \quad \text{deci} \quad x_1 \in f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$$

şi atunci $y_1 = f(x_1) \in B_2$ adică $B_1 \subseteq B_2$.

" $\Leftarrow$ ". Fie $y \in Y$ fixat. Presupunem că $f^{-1}(\{y\}) = \emptyset$. Atunci $\forall y_1 \in f(X)$ avem $f^{-1}(\{y\}) \subset f^{-1}(\{y_1\})$ deci $\{y\} \subset \{y_1\}$ adică $y = y_1$. De aici, $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$, ceea ce este absurd. ■

Exerciţiul 1.1.4. *Fie aplicaţia $f : X \to Y$ şi mulţimile arbitrare $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$. Atunci*

$$\textbf{\textit{a}})\quad f\Big(f^{-1}(B)\Big) = B \iff B \subseteq f(X)$$

$$\textbf{\textit{b}})\quad f(A) \cap B = f\Big(A \cap f^{-1}(B)\Big).$$

Soluţie. **a**) " $\Rightarrow$ ". $f(f^{-1}(B)) = B \Longrightarrow B \subset f\Big(f^{-1}(Y)\Big) = f(X)$.

" $\Leftarrow$ ". Fie $y \in B$ fixat. Deoarece $B \subseteq f(X)$, $\exists x \in X$ cu $f(x) = y$, deci $x \in f^{-1}(B)$ şi atunci

$$y = f(x) \in f\Big(f^{-1}(B)\Big).$$

Aşadar $B \subseteq f\Big(f^{-1}(B)\Big)$ şi cum incluziunea reciprocă este întotdeauna adevărată, avem că egalitatea de la punctul a) este adevărată..

b). $y \in f(A) \cap B \Longleftrightarrow y \in f(A)$ şi $y \in B \iff y \in B$ şi $\exists x \in A$ cu $f(x) = y \iff \exists x \in A \cap f^{-1}(B)$ cu

$$f(x) = y \Longleftrightarrow y \in f\Big(A \cap f^{-1}(B)\Big).$$

■

Exerciţiul 1.1.5. *Dacă $a_1, a_2, ..., a_n \in I\!R$ au proprietăţile $a_i \cdot a_j \geq 0$ şi $a_i \geq -1$, atunci*

$$\prod_{k=1}^{n} (1 + a_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k. \tag{1.1}$$

Ce devine această inegalitate dacă $a_1 = a_2 = ... = a_n = x$, unde $x \in [-1, \infty)$ şi n număr natural arbitrar?

Soluţie. Folosim metoda inducţiei matematice.

Pentru $n = 2$ inegalitatea (1.1) este evidentă.

Presupunem că (1.1) este adevărată pentru n şi o demonstrăm pentru $n + 1$. Avem

$$\prod_{k=1}^{n+1} (1 + a_k) = \Big(\prod_{k=1}^{n} (1 + a_k)\Big)(1 + a_{n+1}) \geq \Big(1 + \sum_{k=1}^{n} a_k\Big)(1 + a_{n+1}) =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} a_k a_{n+1} \geq 1 + \sum_{k=1}^{n+1} a_k.$$

Aşadar,

$$\prod_{k=1}^{n+1}(1+a_k) \geq 1+\sum_{k=1}^{n+1} a_k. \tag{1.2}$$

Inegalitatea (1.2) demonstrează că (1.1) este verificată pentru $n+1$.

Conform metodei inducţiei matematice rezultă că (1.1) este adevărată oricare ar fi numărul natural n şi oricare ar fi numerele $a_1, a_2, ..., a_n$ care satisfac ipotezele din enunţ.

Dacă $a_1 = a_2 = ... = a_n = x$, unde $x \in [-1, \infty)$, inegalitatea (1.1) devine

$$(1+x)^n \geq 1+n\cdot x$$

şi este cunoscută sub numele **inegalitatea lui Bernoulli**. ■

1.2 Exerciţii propuse cu indicaţii şi răspunsuri

Exerciţiul 1.2.1. *Dacă* $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}_+$ *sunt astfel încât* $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n = 1$, *atunci*

$$(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_n) \geq 2^n.$$

Indicaţie. Plecând de la inegalitatea evidentă $(1-a_i)^2 \geq 0$ obţinem $(1+a_i)^2 \geq 4a_i$ de unde, după extragerea rădăcinii pătrate în ambii membri, deducem că inegalitatea $1+a_i \geq 2\sqrt{a_i}$ are loc pentru orice $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Efectuând produsul tuturor acestor inegalităţi, deducem

$$\prod_{i=1}^{n}(1+a_i) \geq 2^n\sqrt{a_1a_2...a_n}$$

din care, dacă se ţine cont că $a_1a_2...a_n = 1$, se obţine inegalitatea din enunţ. ■

Exerciţiul 1.2.2. *Fie aplicaţia* $f : X \to X$ *cu proprietatea* $f \circ f = i_X$, *unde* i_X *este* ***funcţia identitate*** *pe mulţimea oarecare* X.

Să se arate că f *este funcţie bijectivă.*

Indicaţie. Arătaţi că f este **funcţie surjectivă** şi **funcţie injectivă**. ■

Exerciţiul 1.2.3. *Să se arate că oricare* n *numere reale supraunitare* $a_1, a_2, ..., a_n$ *satisfac inegalitatea*

$$\frac{(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_n)}{1+a_1a_2...a_n} \leq 2^{n-1}.$$

Indicaţie. Utilizând inegalitatea evidentă

$$a_{n+1}-1 \leq a_1a_2...a_n(a_{n+1}-1)$$

se arată prin calcul că

$$\frac{(1+a_{n+1})(1+a_1a_2...a_n)}{1+a_1a_2...a_na_{n+1}} \leq 2.$$

■

Răspuns. Inegalitatea cerută rezultă prin folosirea metodei inducţiei matematice după n.

Exerciţiul 1.2.4. *Să se arate că orice n numere reale pozitive $a_1, a_2, ..., a_n$ satisfac inegalităţile:*

$$1^\circ.\quad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \le \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k^2};$$

$$2^\circ.\quad n \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k^2}}.$$

Indicaţie. Utilizaţi **inegalitatea Cauchy − Buniakowski − Schwarz**

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k\cdot b_k\Big)^2 \le \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\Big)\cdot\Big(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\Big)$$

şi alegeţi apoi valori pentru b_k. ■

Exerciţiul 1.2.5. *Să se afle* ***marginea superioară*** *şi* ***marginea inferioară*** *pentru fiecare dintre submulţimile din $I\!R$:*

$$A_1 = \Big\{\frac{3^k+1}{3^k+2}\Big\}_{k\in\mathbb{Z}};\quad A_2 = \Big\{(-1)^n\cos\frac{n\pi}{3}\Big\}_{n\in I\!N};\quad A_3 = \Big\{\sin\frac{n}{n+5}\Big\}_{n\in I\!N};\quad A_4 = \Big\{\frac{n+(-1)^n n}{3n+2}\Big\}_{n\in I\!N}.$$

Indicaţie. Se determină toate subşirurile convergente din fiecare mulţime. ■

Răspuns. $\begin{cases} \inf A_1 = \frac{1}{2}, & \sup A_1 = 1;\\ \inf A_2 = -\frac{1}{2}, & \sup A_2 = 1;\\ \inf A_3 = 0, & \sup A_3 = \sin 1;\\ \inf A_4 = 0, & \sup A_4 = \frac{2}{3}.\end{cases}$ ■

1.3 Întrebări de autoevaluare

1°. Care sunt operaţiile obişnuite ce pot fi efectuate cu două sau mai multe mulţimi? Enumeraţi câteva proprietăţi ale acestor operaţii.

■

2°. Fie A o mulţime arbitrară. Definiţi următoarele noţiuni: **relaţie de echivalenţă** pe mulţimea A; **clase de echivalenţă pe mulţimea** A; **relaţie de ordine pe mulţimea** A.
Când o mulţime este **total ordonată**? ■

3°. Când spunem că o submulţime A din $I\!R$ este o **mulţime mărginită**?
Cum se caracterizează cu ajutorul inegalităţilor noţiunile $\inf A$ şi $\sup A$, unde $A\subset I\!R$? ■

4°. Enumeraţi operaţiile algebrice definite pe $I\!R$ care pot fi extinse pe mulţimea $\overline{I\!R} = I\!R\cup\{-\infty, +\infty\}$.
Care sunt operaţiile ce nu pot fi extinse pe $\overline{I\!R}$ (**cazurile de nedeterminare**)? ■

5°. Care este **axioma lui Arhimede** referitoare la mulţimea numerelor reale? ■

Capitolul 2

MC. 02 – Şiruri şi serii numerice

2.1 Exerciţii rezolvate

Exerciţiul 2.1.1. (**Numărul** e) *Să se arate că şirurile de numere reale* $(a_n)_{n\geq 1}$ *şi* $(b_n)_{n\geq 1}$*, unde*

$$a_n = \Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n, \quad b_n = \Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{n+1}, \quad n\in I\!N^*,$$

sunt strict monotone. Primul şir este strict crescător şi majorat, iar al doilea este strict descrescător şi minorat, deci ambele sunt convergente.

Limitele acestor şiruri sunt egale cu numărul e *aparţinând intervalului* $(2,3)$ *şi o valoare aproximativă a acestuia este* $e \simeq 2,718281828459.$

Soluţie. Ţinând cont de **inegalitatea lui Bernoulli**[1]

$$(1+x)^n > 1+nx, \quad \forall x\in(-1,+\infty)-\{0\}, \quad n\in I\!N^*, \quad n\geq 2,$$

rezultă

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \Big(\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}\Big)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n} = \Big(1-\frac{1}{(n+1)^2}\Big)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n} > \Big(1-\frac{n+1}{(n+1)^2}\Big)\cdot\frac{n+1}{n} = 1.$$

Prin urmare $a_{n+1} > a_n$, ceea ce arată că $(a_n)_{n\geq 1}$ este şir strict crescător.
Folosind din nou inegalitatea lui Bernoulli deducem $b_n > b_{n+1}$, deci şirul (b_n) este strict descrescător.
Pentru orice $n\in I\!N^*$ avem

$$0 < b_n - a_n = \Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n\cdot\frac{1}{n} < \frac{b_n}{n} < \frac{b_1}{n}.$$

Trecând la limită în aceste inegalităţi deducem că şirurile (a_n) şi (b_n) au limitele egale.
Convenim ca limita comună a acestor şiruri să fie notată cu e. Au loc estimările:

$$2 = a_1 < e < b_5 = \Big(1+\frac{1}{5}\Big)^6 = \frac{46656}{15625} = 2,985984 < 3;$$

$$\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n < e < \Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{n+1}.$$

Dacă în ultima estimare logaritmăm, obţinem inegalităţile

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}, \quad n\in I\!N^*, \tag{2.1}$$

[1]Bernoulli, Jean $(1667-1748)$, matematician elveţian

care sunt utilizate în studiul convergenţei şirului $(a_n)_{n\geq 1}$, cu termenul general

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n, \quad n \in I\!N^*,$$

a cărui limită este **constanta lui Euler** C.

O valoare aproximativă cu şase zecimale exacte a constantei lui Euler este $C \approx 0,577216$. ■

Exerciţiul 2.1.2. *Să se arate că seria* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a^n}$, $|a| > 1$ *este convergentă, să se calculeze suma ei şi apoi să se deducă suma seriei* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$.

Soluţie. Termenul general al primei serii este $a_n = \frac{n}{a^n}$. Criteriul radicalului în formularea cu limită aplicat seriei valorilor absolute $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{|a|^n}$ ne dă

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{|a|^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{|a|} = \frac{1}{|a|} < 1,$$

deci seria este absolut convergentă.

Fie acum funcţia $f(x) = \frac{x}{a} + \left(\frac{x}{a}\right)^2 + ... + \left(\frac{x}{a}\right)^n$. Se observă că $f'(1) = s_n$, unde s_n este suma parţială a seriei. Dar $f(x)$ este suma unei progresii geometrice cu n termeni, cu primul termen $\frac{x}{a}$ şi raţia $\frac{x}{a}$, a cărei sumă este

$$f(x) = \frac{x}{a} \frac{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^n}{1 - \frac{x}{a}} = \frac{x}{a - x}\left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^n\right)$$

şi atunci

$$f'(x) = \frac{a}{(x-a)^2}\left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^n\right) + \frac{x}{x-a} n \left(\frac{x}{a}\right)^{n-1} \frac{1}{a}$$

de unde, luând $x = 1$, deducem

$$f'(1) = \frac{a}{(a-1)^2}\left(1 - \frac{1}{a^n}\right) + \frac{1}{1-a}\frac{n}{a^n} = s_n \to \frac{a}{(a-1)^2}$$

care este suma primei serii, deci

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a^n} = \frac{a}{(a-1)^2}.$$

Pentru determinarea sumei celeilalte serii observăm că se poate scrie ca diferenţă de două serii

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 4 - 1 = 3,$$

cu menţiunea că prima serie este de două ori seria iniţială în care $a = 2$, iar ultima este o serie geometrică cu raţia $\frac{1}{2}$ şi primul termen de asemenea egal cu $\frac{1}{2}$. ■

Exerciţiul 2.1.3. *Să se studieze convergenţa următoarelor serii numerice cu termeni pozitivi:*

$$\textbf{\textit{a}})\ \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\Big);\quad \textbf{\textit{b}})\ \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{an+b}{cn+d}\Big)^{n},\ \ a,c>0;\quad \textbf{\textit{c}})\ \sum_{n=1}^{\infty}a^{\ln n},\ \ a>0;$$

$$\textbf{\textit{d}})\ \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\frac{a(a+1)(a+2)...(a+n)}{b(b+1)(b+2)...(b+n)}\alpha^{n},\ \ a,b,\alpha>0.$$

Soluţie. **a**) Studiind funcţia $f:[0,\infty)\to I\!R,\ \ f(x)=\sin x-x+\dfrac{x^3}{6}$ constatăm că este strict crescătoare şi $f\Big(\dfrac{1}{n}\Big)\geq f(0)$, de unde deducem $\dfrac{1}{n}-\sin\dfrac{1}{n}<\dfrac{6}{n^3}$. Seria $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ este convergentă (serie armonică generalizată cu $\alpha=3$) şi atunci aplicând primul criteriu de comparaţie rezultă că seria $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\Big)$ este convergentă.

b) Se aplică criteriul rădăcinii în formularea cu limită. Pentru $a<c$ seria este convergentă, pentru $a>c$ seria este divergentă, iar pentru $a=c$ termenul general al seriei nu tinde la zero, prin urmare seria este divergentă.

c) Se aplică criteriul logaritmic, ajungându–se la limita

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln a^{-\ln n}}{\ln n}=\ln\frac{1}{a}.$$

Pentru $a<\dfrac{1}{e}$ seria este convergentă, pentru $a>\dfrac{1}{e}$ seria este divergentă, iar dacă $a=\dfrac{1}{e}$ atunci seria dată devine $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ care se ştie că este divergentă fiind seria armonică.

d) Raportul termenilor a_{n+1} şi a_n ai seriei are limita α. Seria este convergentă pentru $0<\alpha<1,$ divergentă pentru $\alpha>1,$ iar pentru $\alpha=1$ folosind criteriul lui Raabe obţinem

$$\lim_{n\to\infty}n\Big(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\Big)=b-a-1$$

din care deducem că seria corespunzătoare este convergentă pentru $b>a+2$ şi divergentă pentru $b<a+2.$

Dacă $b=a+2$ seria devine $\displaystyle a(a+1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(a+n+1)(a+n+2)}$, comparabilă cu seria armonică $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, care este o serie divergentă. În concluzie, pentru $\alpha=1$ şi $b=a+2$ seria din enunţ este divergentă. ■

Exerciţiul 2.1.4. *Să se studieze natura seriilor*

$$\textbf{a}).\ \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{n+3}{2n+1}\Big)^{n\ln n};\quad \textbf{b}).\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{3n}(n!)^3}{(3n)!};$$

$$\textbf{c}).\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^{n-1}}{n^{n+1}};\quad \textbf{d}).\ \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sqrt{(n+1)(n+a)}-n\Big)^{n},\quad a>-1.$$

Soluţie. **a**). Aplicăm criteriul radicalului. Se observă că $\sqrt[n]{a_n}=\Big(\dfrac{n+3}{2n+1}\Big)^{\ln n}$, iar $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=0<1,$ deci seria este convergentă.

b). Termenul general al seriei este $a_n = \dfrac{4^{3n}(n!)^3}{(3n)!}$, raportul a doi termeni consecutivi dă

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{64}{3} \cdot \frac{(n+1)^2}{(3n+1)(3n+2)}.$$

Trecând la limită în ultima egalitate, obţinem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{64}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(3n+1)(3n+2)} = \frac{64}{27}.$$

Deoarece această limită este supraunitară, conform **criteriului raportului** sau **criteriul lui D'Alembert** rezultă că seria este divergentă.

c). Folosim criteriul de comparaţie de prima speţă. Termenul general al seriei se scrie în forma

$$a_n = \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n \cdot \frac{1}{n(n+1)}.$$

Însă, $\Big(1 + \dfrac{1}{n}\Big)^n < e$, iar $\dfrac{1}{n(n+1)} < \dfrac{1}{n^2}$ deci $a_n < \dfrac{e}{n^2}$.

Cum seria $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ este convergentă fiindcă este **seria lui Riemann** pentru $\alpha = 2$, din criteriul de comparaţie de speţa întâi rezultă că seria este convergentă.

d). Aplicăm criteriul radicalului. Găsim

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \Big(\sqrt{(n+1)(n+a)} - n\Big) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+a) - n^2}{\sqrt{(n+1)(n+a)} + n} = \frac{a+1}{2},$$

de unde deducem:

- $-1 < a < 1 \implies$ seria este convergentă;
- $a \geq 1 \implies$ seria este divergentă.

■

Exerciţiul 2.1.5. *Discutaţi în raport cu parametrul real* λ *natura seriei numerice cu termeni pozitivi* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *unde*

$$a_n = (2n+1)\Big[\frac{\lambda(\lambda+1)...(\lambda-n+1)}{(\lambda+1)(\lambda+2)...(\lambda+n+1)}\Big]^2.$$

Soluţie. Avem:

$$a_{n+1} = (2n+3)\Big[\frac{\lambda(\lambda+1)...(\lambda-n+1)(\lambda-n)}{(\lambda+1)(\lambda+2)...(\lambda+n+1)(\lambda+n+2)}\Big]^2; \quad D_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+3}{2n+1} \cdot \Big(\frac{\lambda-n}{\lambda+n+2}\Big)^2.$$

Din ultima egalitate rezultă $\displaystyle\lim_{n\to\infty} D_n = 1$, adică dubiu. În această situaţie aplicăm criteriul lui Raabe. Ca atare, determinăm expresia

$$R_n = n\Big(\frac{1}{D_n} - 1\Big) = n\Big(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\Big) = \frac{(8\lambda+6)n^3 + 2(8\lambda+6)n^2 - 2(\lambda^2 - 2\lambda - 2)}{(2n+3)(\lambda-n)^2}$$

şi apoi limita sa la infinit. Găsim

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(8\lambda+6)n^3 + 2(8\lambda+6)n^2 - 2(\lambda^2 - 2\lambda - 2)}{(2n+3)(\lambda-n)^2} = 4\lambda + 3,$$

de unde începe discuţia:

- $4\lambda + 3 > 1 \Longrightarrow \lambda > -\dfrac{1}{2} \Longrightarrow$ seria este convergentă;
- $4\lambda + 3 < 1 \Longrightarrow \lambda < -\dfrac{1}{2} \Longrightarrow$ seria este divergentă;
- $\lambda = -\dfrac{1}{2} \Longrightarrow$ seria devine $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2n+1}$, care este divergentă fiindcă este comparabilă cu seria armonică.

■

2.2 Exerciţii propuse cu indicaţii şi răspunsuri

Exerciţiul 2.2.1. *Utilizând criteriul general de convergenţă al lui Cauchy să se arate că următoarele şiruri* $(a_n)_{n\geq 1}$ *sunt convergente:*

$$\boldsymbol{a}). \quad a_n = \frac{\sin a}{1\cdot 2} + \frac{\sin 2a}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{\sin na}{n(n+1)}; \qquad \boldsymbol{b}). \quad a_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \ldots + \frac{1}{4n^2-1}.$$

Indicaţie. În diferenţa $a_{n+p} - a_n$ se descompun în fracţii simple fracţiile $\dfrac{1}{k(k+1)}$ şi $\dfrac{1}{4k^2-1}$. ■

Răspuns. Ambele şiruri sunt convergente. ■

Exerciţiul 2.2.2. *Să se studieze natura seriei cu termeni oarecare*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(a-5)^n}{n \cdot 3^n}$$

în funcţie de parametrul $a \in I\!R$.

Indicaţie. Se studiază seria valorilor absolute. ■

Răspuns. Pentru $a \in (2, 8)$ seria este absolut convergentă. Pentru $a \in (-\infty, 2] \cup (8, +\infty)$ seria este divergentă, iar pentru $a = 8$ seria este simplu convergentă. ■

Exerciţiul 2.2.3. *Să se studieze convergenţa următoarelor serii cu termeni oarecare:*

$$\boldsymbol{a}). \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n \cos nx}{n!}, \quad a, x \in I\!R; \qquad \boldsymbol{b}). \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cdot \sin n^2}{\sqrt{n}}.$$

Indicaţie. **a**). Se utilizează criteriul de comparaţie de speţa întâi, seria majorantă fiind $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a|^n}{n!}$ a cărei convergenţă se studiază folosind criteriul raportului. **b**). Se aplică criteriul lui Dirichlet. ■

Răspuns. **a**). Seria este absolut convergentă. **b**). Seria este convergentă. ■

Exerciţiul 2.2.4. *Să se studieze convergenţa următoarelor serii cu termeni oarecare:*

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{(2n+1)^2};\quad b)\ \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^2-1};\quad c)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n\sin^{2n}x}{n+1},\quad x\in\Big[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\Big].$$

Indicaţie. Pentru studiul naturii primelor două serii se aplică criteriul lui Leibniz de convergenţă a unei serii alternante. Celei de a treia serie, i se studiază absoluta convergenţă. ■

Răspuns. Primele două serii sunt convergente, dar nu şi absolut convergente. A treia serie este:

- absolut convergentă pentru $x\in\Big[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\Big]$;
- semi–convergentă pentru $x\in\Big\{-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\Big\}$;
- divergentă pentru restul valorilor lui x, deoarece termenul general nu tinde la zero.

■

Exerciţiul 2.2.5. *Să se studieze convergenţa seriilor cu termeni pozitivi:*

$$(\boldsymbol{a})\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{(n+1)(n+2)...(n+n)};\qquad (\boldsymbol{b})\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot ...\cdot(3n-2)}{3\cdot 6\cdot ...\cdot(3n)}\cdot\frac{1}{n+3};$$

$$(\boldsymbol{c})\ \sum_{n=3}^{\infty}\Big(\frac{1}{\ln\ln n}\Big)^{\ln n};\qquad (\boldsymbol{d})\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{9^n}\Big(\frac{n^2+1}{n^2-1}\Big)^{n^3}.$$

Indicaţie. Se aplică:

- pentru punctul **(a)**, criteriul raportului;
- pentru punctul **(b)**, criteriul lui Raabe;
- pentru punctul **(c)**, criteriul logaritmic;
- pentru punctul **(d)**, criteriul radicalului.

■

Răspuns. Toate seriile sunt convergente. ■

2.3 Întrebări de autoevaluare

1°. Enumeraţi proprietăţile şirurilor numerice convergente. ■

2°. Definiţi noţiunea de **şir numeric fundamental** şi enunţaţi **criteriul general de convergenţă (Cauchy) al unui şir numeric**. ■

3°. Justificaţi **convergenţa** (**divergenţa**) atât pentru **seria geometrică** cât şi pentru **seria armonică generalizată** (**seria lui Riemann**). ■

4°. **Absoluta convergenţă a unei serii numerice** implică convergenţa sa?
Dacă răspunsul la întrebare este da, demonstraţi afirmaţia. ∎

5°. Cum se numeşte o serie numerică convergentă care nu este absolut convergentă? Ce se poate spune despre **seria numerică alternantă** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$.? ∎

Capitolul 3

MC. 03 – Elemente de teoria spaţiilor metrice

3.1 Exerciţii rezolvate

Exerciţiul 3.1.1. *Să se arate că aplicaţiile*

$$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad d(x, y) = |x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \tag{3.1}$$

$$d_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad d_1(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \tag{3.2}$$

sunt metrici echivalente pe $\mathbb{R}$ şi că nu există $a, b \in \mathbb{R}$, cu $0 < a \leq b$, astfel încât să aibă loc inegalităţile

$$a\, d(x, y) \leq d_1(x, y) \leq b\, d(x, y). \tag{3.3}$$

Soluţie. Prima aplicaţie este **metrica Euclidiană** din $\mathbb{R}$. Folosind proprietăţile funcţiei modul se arată simplu că d_1 este o metrică pe $\mathbb{R}$, diferită de metrica d.

Prin urmare, perechile $(\mathbb{R}, d)$ şi $(\mathbb{R}, d_1)$ sunt spaţii metrice diferite.

Reamintim definiţia a două **metrici echivalente pe o aceaşi mulţime nevidă** X.

Definiţia 3.1.1. *Metricele d şi d_1 pe mulţimea nevidă X se numesc* ***echivalente*** *şi se scrie $d \sim d_1$ dacă, oricare ar fi punctul $x_0 \in X$, avem*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 \quad \textit{astfel încât} \quad B_d(x_0, \delta(\varepsilon)) \subset B_{d_1}(x_0, \varepsilon); \tag{3.4}$$

$$\forall\, \lambda > 0 \quad \exists\, \mu(\lambda) > 0 \quad \textit{astfel încât} \quad B_{d_1}(x_0, \mu(\lambda)) \subset B_d(x_0, \lambda). \tag{3.5}$$

În Definiţia 3.1.1 $B_d(x_0, \lambda)$ reprezintă **bila deschisă** cu centrul în punctul x_0 şi rază $\lambda > 0$, mai precis

$$B_d(x_0, \lambda) = \{x \in X \,|\, d(x, x_0) < \lambda\}.$$

Fie $x_0 \in X$, punct fixat arbitrar din $\mathbb{R}$. Evident, $d_1(x, x_0) \leq d(x, x_0)$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, astfel că pentru a avea incluziunea $B_d(x_0, \delta(\varepsilon)) \subset B_{d_1}(x_0, \varepsilon)$ din Definiţia 3.1.1 putem lua $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$.

Pe de altă parte, din (3.2) se observă că $d_1(x, x_0) < 1$ oricare ar fi x şi x_0 din $I\!R$, ceea ce conduce la afirmaţia că dacă $\rho \geq 1$ şi $x_0 \in I\!R$, atunci bila deschisă cu centrul în x_0 de rază ρ din spaţiul metric $(I\!R, d_1)$ este întreg spaţiul, adică $B_{d_1}(x_0, \rho) = I\!R$. Dacă însă $0 < \rho < 1$, atunci

$$x \in B_{d_1}(x_0, \rho) \Longrightarrow \frac{|x - x_0|}{1 + |x - x_0|} < \rho \Longrightarrow |x - x_0| < \frac{\rho}{1 - \rho} \Longrightarrow x \in B_d\Big(x_0, \frac{\rho}{1 - \rho}\Big),$$

ceea ce înseamnă că $B_{d_1}(x_0, \rho) \subset B_d\Big(x_0, \dfrac{\rho}{1 - \rho}\Big)$.

Pentru a avea satisfăcută şi cea de a doua incluziune din Definiţia 3.1.1 luăm $\mu(\lambda)$ astfel încât $\dfrac{\mu(\lambda)}{1 - \mu(\lambda)} = \lambda$ din care rezultă $\mu(\lambda) = \dfrac{\lambda}{1 + \lambda}$.

Prin urmare cele două metrici sunt echivalente.

Deşi metricele d şi d_1 sunt echivalente, prima parte a inegalităţii (3.3) nu poate avea loc căci $d_1(x, x_0) < 1$, $\forall\, x, x_0 \in I\!R$ conduce la inegalităţile $d(x, x_0) \leq \dfrac{1}{a} d_1(x, x_0) < \dfrac{1}{a}$, din care rezultă $d(x, x_0) < \dfrac{1}{a}$, $\forall\, x, x_0 \in I\!R$, care evident este falsă. ■

Exerciţiul 3.1.2. *Fie şirul de numere reale* $(x_n)_{n \in I\!N}$ *al cărui termen general este dat de* ***relaţia de recurenţă*** $x_n = \dfrac{\pi}{3\sqrt{3}} \cos x_{n-1}$, *unde* $x_0 \in I\!R$ *este arbitrar fixat.*

Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$.

Soluţie. Presupunem că există limita u a şirului $(x_n)_{n \in I\!N}$. Trecând la limită în relaţia de recurenţă şi ţinând cont de continuitatea funcţiei cosinus (limita cosinusului este egală cu cosinusul limitei) observăm că u trebuie să fie o rădăcină a ecuaţiei $u = \dfrac{\pi}{3\sqrt{3}} \cos u$, adică u este un **punct fix** al aplicaţiei (funcţiei)

$$f : I\!R \to I\!R, \quad f(x) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \cos x. \tag{3.6}$$

Observaţia de mai sus ne sugerează să considerăm **spaţiul metric Euclidian** $I\!R$ cu metrica $d(x, y) = |x - y|$ şi funcţia (3.6) pentru care calculăm distanţa între două valori ale sale. Avem

$$d(f(x), f(y)) = |f(x) - f(y)| = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} |\cos x - \cos y|.$$

Transformând diferenţa de cosinusuri în produs, obţinem

$$d(f(x), f(y)) = |f(x) - f(y)| = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \Big| 2 \sin \frac{x + y}{2} \cdot \sin \frac{x - y}{2} \Big|.$$

Dar:

$$\Big| \sin \frac{x + y}{2} \Big| \leq 1; \quad \Big| \sin \frac{x - y}{2} \Big| \leq \frac{x - y}{2}.$$

Cu ajutorul acestor majorări

$$d(f(x), f(y)) \leq \frac{\pi}{3\sqrt{3}} d(x, y), \quad \forall x, y \in I\!R,$$

care arată că f este o **contracţie pe spaţiul metric** $(I\!R, d)$.

Metrica $d(x, y) = |x - y|$ provine din **norma Euclidiană** pe $I\!R$ care este funcţia modul $|.|$, iar perechea $(I\!R, |.|)$ este **spaţiu Banach**. Conform **principiului contracţiei** (**teorema de punct fix a lui Banach**) există un punct unic $u = \dfrac{\pi}{6}$ astfel încât $f(u) = u$.

Şirul de numere reale $(x_n)_{n \in I\!N}$ este chiar şirul aproximaţiilor succesive corespunzător funcţiei f şi punctului iniţial x_0.

Aşadar, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \dfrac{\pi}{6}$. ■

Exerciţiul 3.1.3. *Se consideră şirul de vectori* $(\mathbf{x}_n)_{n\geq 1}$ *din spaţiul metric* $(I\!R^3, d)$, *unde* $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$ *este* ***metrica Euclidiană*** *pe* $I\!R^n$ *şi*

$$\mathbf{x}_n \;=\; \Big(\Big(1+\frac{\lambda}{n}\Big)^n,\ \sqrt[n]{\frac{(n!)^2}{(2n)!8^n}},\ n(a^{\frac{1}{n}}-1)\Big),$$

Să se determine parametrul real λ *astfel încât limita şirului să fie la distanţă minimă în* $(I\!R^3, d)$ *faţă de punctul* $\mathbf{a}(\lambda) = \Big(1,\ \dfrac{1}{32}e^{-\lambda},\ \ln a\Big)$.

Soluţie. Se foloseşte proprietatea *limita unui şir de vectori dintr–un spaţiu vectorial finit dimensional, care este şi spaţiu metric, este egală cu vectorul care are coordonatele limitele şirurilor coordonate.*

Pentru limita primului şir de coordonate se foloseşte numărul e şi avem $\lim\limits_{n\to\infty}\Big(1+\dfrac{\lambda}{n}\Big)^n = e^{\lambda}$.

Al doilea şir de coordonate are termenul general de forma

$$x_{n2} = \sqrt[n]{a_n}.$$

Limita acestui şir se determină folosind proprietatea:

$$\text{dacă există}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = x_{20}\in I\!R,\quad \text{atunci avem}\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = x_{20}.$$

Pentru limita celui de al treilea şir de coordonate se foloseşte **limita fundamentală**

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a,$$

unde a este un număr real pozitiv dat. Aplicând **definiţia cu şiruri a limitei unei funcţii într–un punct** şi luând ca şir convergent la zero şirul cu termenul general $x_n = \dfrac{1}{n}$, găsim că limita celui de al treilea şir de coordonate este $\ln a$.

Prin urmare

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{x}_n = \Big(e^{\lambda},\ \frac{1}{32},\ \ln a\Big) = \mathbf{x}_0.$$

Distanţa Euclidiană între punctele $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{x}_0$

$$d(\mathbf{a},\mathbf{x}_0) = \frac{|e^{\lambda}-1|}{32e^{\lambda}}\sqrt{(32e^{\lambda})^2+1}$$

este minimă dacă $\lambda = 0$. Prin urmare limita şirului de vectori $\mathbf{x}_n$ este $\mathbf{a}(0)$. ■

Exerciţiul 3.1.4. *Şirul de funcţii reale de o variabilă reală*

$$(f_n)_{n\geq 1},\quad f_n:[0,1]\to I\!R,\ f_n(x) = \frac{x^2+nx+n^2}{x^2+n^2}$$

este ***uniform convergent*** *la funcţia*

$$f:[0,1]\to I\!R,\ f(x) = 1,\quad \forall x\in[0,1],$$

iar şirul de funcţii

$$(f_n)_{n\geq 1},\quad f_n:I\!R\to I\!R,\ f_n(x) = \frac{x^2+nx+n^2}{x^2+n^2}$$

nu este uniform convergent la funcţia limită

$$f:I\!R\to I\!R,\ f(x) = 1,\quad \forall x\in I\!R. \tag{3.7}$$

Soluţie. Convergenţa uniformă a unui şir de funcţii este convergenţa în **metrica lui Cebâşev** ρ

$$\rho(f_n, f) = \sup_{x\in[0,1]} d(f_n(x), f(x)) = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)|.$$

Însă,

$$|f_n(x) - f(x)| = \Big|\frac{x^2+nx+n^2}{x^2+n^2} - 1\Big| = \frac{nx}{x^2+n^2} = \varphi(x), \quad x \in [0,1].$$

Prin urmare trebuie determinată **marginea superioară** a funcţiei

$$\varphi : [0,1] \to I\!R, \quad \varphi(x) = \frac{nx}{x^2+n^2}.$$

Pentru a afla marginea superioară a funcţiei φ calculăm

$$\varphi'(x) = \frac{n^3 - nx^2}{(x^2+n^2)^2}, \quad x \in [0,1],$$

de unde deducem posibilitatea ca valorile extreme ale funcţiei φ să se atingă în $x = \pm n$. Dacă $n > 1$, punctele $x = \pm n$ nu aparţin compactului $[0,1]$ şi deci valoarea maximă se va atinge în extremităţile segmentului $[0,1]$. Cum $f(0) = 0$ şi $f(1) = \dfrac{n}{1+n^2}$

$$\rho(f_n, f) = \frac{n}{1+n^2}.$$

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(f_n, f) = 0$, rezultă că primul şir de funcţii din enunţul exerciţiului este uniform convergent, iar limita sa, după cum se vede, este funcţia din enunţ.

În cazul celui de al doilea şir de funcţii, deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 1\ \forall x \in I\!R$, **limita punctuală** este funcţia reală de variabilă reală (3.7).

Mai trebuie arătat că şirul numeric cu termenul general $\rho(f_n, f)$ nu este convergent la zero.

Pentru aceasta observăm că funcţia $x \mapsto |f_n(x) - f(x)| = \dfrac{nx}{x^2+n^2}$ are valorile extreme $-\dfrac{1}{2}$ şi $\dfrac{1}{2}$, acestea fiind valorile funcţiei în $x = -n$ şi respectiv $x = n$.

Trebuie arătat că şirul cu termenul general $\rho(f_n, f)$ nu converge la zero. Într–adevăr,

$$\rho(f_n, f) = \sup_{x\in I\!R} d(f_n(x), f(x)) = \max_{x\in I\!R} |f_n(x) - f(x)| = \max_{x\in I\!R} \frac{nx}{x^2+n^2} = \frac{1}{2} \not\to 0,$$

deci convergenţa punctuală $f_n \xrightarrow[I\!R]{p} f$ nu este uniformă. ■

Exerciţiul 3.1.5. *Să se arate că aplicaţia*

$$\|\cdot\| : C([1,e]) \to I\!R_+, \quad \|f\| = \sqrt{\int_1^e f^2(x) \ln x \, dx}, \quad f \in C([1,e]) \tag{3.8}$$

este o normă pe spaţiul vectorial real $C([1,e])$ al funcţiilor reale continue pe compactul $[1,e]$ şi să se calculeze norma funcţiei $f(x) = \sqrt{x},\ x \in [1,e]$.

Soluţie. Pentru ca raţionamentul de mai jos să poată fi urmărit reamintim definiţia unei **norme pe un spaţiu vectorial real**.

Definiţia 3.1.2. *Aplicaţia $\|\cdot\| : V \to I\!R$ se numeşte* **normă** *pe spaţiul liniar real V dacă satisface următoarele proprietăţi:*

(N_1) $\quad \|\mathbf{x}\| = 0 \Longrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$;

(N_2) $\quad \|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|\|\mathbf{x}\|,\ \forall\,\lambda \in I\!R$ *şi* $\forall\,\mathbf{x} \in V$;

(N_3) $\quad \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \le \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|,\ \forall \mathbf{x},\ \mathbf{y} \in V.$

Din $f \in C([1,e])$ şi continuitatea funcţiei logaritmice rezultă că funcţia $x \mapsto f^2(x)\ln x$ este continuă pe compactul $[1,e]$ şi deci integrabilă.

Deoarece funcţia $x \mapsto \ln x$ este nenegativă pe intervalul $[1,e]$, considerând funcţia $f \in C([1,e])$ cu proprietatea $\|f\| = 0$ deducem $f = 0$, ceea ce arată că axioma (N_1) este satisfăcută.

Dacă $\lambda \in I\!\!R$ şi $f \in C([1,e])$ sunt elemente arbitrare, atunci

$$\|\lambda f\| = \sqrt{\int_1^e \lambda^2 f^2(x)\ln x\,dx} = |\lambda|\sqrt{\int_1^e f^2(x)\ln x\,dx} = |\lambda|\|f\|,$$

de unde rezultă că axioma (N_2) este de asemenea verificată.

Pentru a arăta că şi axioma (N_3) este satisfăcută calculăm pătratul normei sumei a două funcţii continue arbitrare f şi g definite pe compactul $[1,e]$. Avem

$$\begin{aligned}\|f+g\|^2 = \int_1^e (f(x)+g(x))^2 \ln x\,dx = \int_1^e \Big(f^2(x)+2f(x)g(x)+g^2(x)\Big)\ln x\,dx = \\ = \|f\|^2 + 2\int_1^e f(x)g(x)\ln x\,dx + \|g\|^2.\end{aligned} \tag{3.9}$$

Încercăm să găsim o majorare pentru termenul $\displaystyle\int_1^e f(x)g(x)\ln x\,dx$ din (3.9). Presupunând $f \neq 0$, considerăm funcţia polinomială

$$\varphi : I\!\!R \to I\!\!R, \quad \varphi(t) = \int_1^e (tf(x)-g(x))^2 \ln x\,dx, \quad f,g \in C([1,e]), \quad f \neq 0, \tag{3.10}$$

ale cărei valori se pot scrie

$$\varphi(t) = \|f\|^2 t^2 - 2\Big(\int_1^e f(x)g(x)\ln x\,dx\Big)t + \|g\|^2, \tag{3.11}$$

din care se vede că

$$\varphi(t) \geq 0, \quad \forall t \in I\!\!R. \tag{3.12}$$

Din (3.10), (3.11) şi (3.12) rezultă că funcţia polinomială φ este un trinom de gradul al doilea nenegativ. Folosind această remarcă deducem că inegalitatea (3.12) are loc dacă şi numai dacă **discriminantul trinomului** este nepozitiv, adică

$$\Big(\int_1^e f(x)g(x)\ln x\,dx\Big)^2 - \|f\|^2\,\|g\|^2 \leq 0. \tag{3.13}$$

Dacă în (3.13) trecem în membrul doi termenul $-\|f\|^2\,\|g\|^2$ şi extragem radicalul, obţinem

$$\Big|\int_1^e f(x)g(x)\ln x\,dx\Big| \leq \|f\|\,\|g\|. \tag{3.14}$$

Adăugând faptul că un număr real este mai mic cel mult egal cu modulul său, din (3.14) deducem

$$\int_1^e f(x)g(x)\ln x\,dx \leq \|f\|\,\|g\|. \tag{3.15}$$

Revenind la (3.9) şi ţinând cont de (3.15) obţinem

$$\|f+g\|^2 \leq \Big(\|f\|+\|g\|\Big)^2. \tag{3.16}$$

Rezultatul extragerii rădăcinii pătrate din ambii membri ai inegalităţii (3.16) arată că axioma (N_3) este şi ea satisfăcută.

Prin urmare, aplicaţia (3.8) este o normă pe spaţiul liniar real $C([1,e])$.

Să determinăm norma (lungimea) vectorului $f \in C([1,e])$ specificat în enunţ, adică a funcţiei $f(x) = \sqrt{x}$. Vom calcula pătratul acestei norme. Integrând prin părţi, avem

$$\|f\|^2 = \int_1^e x\,\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{x}{2}\,dx = \frac{1+e^2}{4},$$

de unde $\|f\| = \dfrac{1}{2}\sqrt{1+e^2}$. ■

3.2 Exerciţii propuse cu indicaţii şi răspunsuri

Exerciţiul 3.2.1. *Determinaţi punctele fixe ale aplicaţiilor:*

$$a) \quad f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \quad f(x)=x^5;$$
$$b) \quad f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}, \quad f(x)=z^5.$$

Indicaţie. Amintim definiţia **punctului fix** al unei aplicaţii definită pe un spaţiu metric cu valori în acelaşi spaţiu metric.

Definiţia 3.2.1. *Elementul x al unui spaţiu metric (X,d) se numeşte **punct fix** al aplicaţiei $f:X\to X$ dacă $f(x)=x$.*

Se rezolvă ecuaţiile $f(x)=x$, în mulţimea numerelor reale şi $f(z)=z$, în mulţimea numerelor complexe $\mathbb{C}$.■

Răspuns.

$$a) \quad x_1=-1,\ x_2=0,\ x_3=1;$$
$$b) \quad z_1=-1,\ z_2=0,\ z_3=1,\ z_4=-i,\ z_5=i,\ (i=\sqrt{-1}).$$

■

Exerciţiul 3.2.2. *Dacă $\mathbb{C}$ este mulţimea numerelor complexe $z=x+iy$, unde $x,y\in\mathbb{R}$, atunci să se arate că perechea $(\mathbb{C},d)$, unde*

$$d:\mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{R}_+, \quad d(z_1,z_2)=|z_1-z_2|, \quad z_1=x_1+iy_1, \quad z_2=x_2+iy_2, \tag{3.17}$$

*este **spaţiu metric complet**.*

Indicaţie. Numărul complex $x-iy$, notat cu $\overline{z}$, se numeşte **conjugatul complex** al numărului complex $z=x+iy$. **Modulul numărului complex** z, notat prin $|z|$, se ştie că este $|z|=\sqrt{z\cdot\overline{z}}$. Evident,

$$|z_1-z_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}. \tag{3.18}$$

Folosind (3.17) şi (3.18) demonstraţi că aplicaţia d din (3.17) este o metrică pe $\mathbb{C}$, deci $(\mathbb{C},d)$ este spaţiu metric.

Amintim definiţia **spaţiului metric complet**.

Definiţia 3.2.2. *Perechea (X,d) se numeşte **spaţiu metric complet** dacă (X,d) este spaţiu metric şi orice **şir de puncte fundamental** din X este **convergent**.*

A da un **şir de puncte** în $(\mathbb{C},d)$ este echivalent cu a da două şiruri numerice şi anume **şirul părţilor reale** şi **şirul părţilor imaginare**. Apoi se ţine cont că un şir de numere reale este **convergent** dacă şi numai dacă este **fundamental**. ■

Exerciţiul 3.2.3. *Să se arate că perechea $(\mathbb{R},d)$, unde $d(x,y)=|\operatorname{arctg} x-\operatorname{arctg} y|$ este un spaţiu metric, dar nu este spaţiu metric complet.*

Indicaţie. Faptul că aplicaţia d este metrică se arată demonstrând că sunt satisfăcute axiomele (M_1), (M_2), (M_3) din definiţia unei distanţe.

Arătaţi apoi că şirul cu termenul general $x_n = n$ este fundamental, dar nu este convergent în metrica d. ■

Exerciţiul 3.2.4. *În spaţiul metric $(I\!R^3, d)$, unde d este **metrica Euclidiană** pe $I\!R^3$, să se calculeze limitele următoarelor şiruri:*

$$(\mathbf{x}_n)_{n\geq 1}, \quad \mathbf{x}_n = \Big(\frac{n}{2n+1}, \frac{n^2}{n^2+1}, n\,\sin\frac{1}{n}\Big);$$

$$(\mathbf{y}_n)_{n\geq 1}, \quad \mathbf{y}_n = \Big(\Big(\frac{n^2-nk+1}{n^2+1}\Big)^{\frac{n^2+n+1}{n+1}}, \sqrt[n]{n}, n\,\sin\frac{1}{n}\Big), \quad k \in I\!N^*.$$

Indicaţie. Limita unui şir de puncte (vectori) din $I\!R^3$ este vectorul din $I\!R^3$ cu coordonatele limitele şirurilor coordonate ale şirului dat. ■

Răspuns. $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \Big(\frac{1}{2}, 1, 1\Big), \quad \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{y}_n = (e^{-k}, 1, 1).$ ■

Exerciţiul 3.2.5. *Să se arate că funcţia $g : I\!R^3 \times I\!R^3 \to I\!R$ definită prin*

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 3x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 - x_2y_3 - x_3y_2,$$

*unde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ şi $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ sunt vectori arbitrari din $I\!R^3$, este un **tensor metric** sau **produs scalar** pe spaţiul vectorial real $I\!R^3$ şi apoi să se calculeze:*

- *produsele scalare $g(x_0, y_0)$, $g(x_0, x_0)$ şi $g(y_0, y_0)$;*
- *normele vectorilor $\mathbf{x}_0 = (1, 1, 1)$ şi $\mathbf{y}_0 = (2, -1, 5)$;*
- *distanţa dintre vectorii $\mathbf{x}_0$ şi $\mathbf{y}_0$;*
- *unghiul φ dintre vectorii $\mathbf{x}_0$ şi $\mathbf{y}_0$.*

Indicaţie. Pentru rezolvarea primei părţi a exerciţiului reamintim

Observaţia 3.2.1. *Un produs scalar pe spaţiul vectorial real H este o formă biliniară simetrică pe H cu proprietatea că forma pătratică asociată este pozitiv definită.*

■

Răspuns. $g(x_0, y_0) = 11$, $g(x_0, x_0) = 7\|\mathbf{x}_0\|^2$, $g(y_0, y_0) = 70 = \|\mathbf{y}_0\|^2$, $d(x_0, y_0) = 55$, $\cos\varphi = \dfrac{11}{7\sqrt{10}}$. ■

3.3 Întrebări de autoevaluare

1°. Enunţaţi şi demonstraţi teorema de punct fix a lui Banach. ■

2°. Demonstraţi că dacă (H, g) este un **spaţiu Euclidian real** atunci pentru orice vectori din H

$$\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_m, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_n$$

şi orice scalari reali

$$\lambda, \mu, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m, \mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$$

au loc egalităţile:

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) = g(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) + g(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2),$$

$$g(\mathbf{x}, \mu\mathbf{y}) = \mu g(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = 0;$$

$$g\Big(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{x}_i, \sum_{j=1}^{n} \mu_j \mathbf{y}_j\Big) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i \mu_j g(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j).$$

■

3°. Demonstraţi că într–un spaţiu Euclidian real $(H, \cdot)$ are loc

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}\sqrt{\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}}, \quad \forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in H, \tag{3.19}$$

numită **inegalitatea lui Cauchy–Buniakowski–Schwarz**.

Când are loc egalitate în (3.19)? ■

Răspuns. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă vectorii $\mathbf{x}$ şi $\mathbf{y}$ sunt **liniar dependenţi** sau **coliniari**. ■

4°. Cum se scrie matematic că doi vectori sunt liniar coliniari?

Verificaţi că afirmaţia referitoare la egalitatea în (3.19) este adevărată. ■

5°. Dacă A este o mulţime dintr–un spaţiu metric (X, d), daţi definiţiile noţiunilor: acoperire pentru A; acoperire finită a lui A; acoperire finită deschisă a lui A; $\varepsilon-$reţea finită a lui A. De asemeni, precizaţi noţiunile: mulţime compactă prin acoperire; mulţime secvenţial compactă; spaţiu metric compact prin şiruri. ■

6°. Demonstraţi echivalenţa convergenţei unui şir de vectori din spaţiul Euclidian real $\mathbb{R}^n$ cu convergenţa şirurilor coordonate. ■

Capitolul 4

MC. 04 – Limite şi continuitate

4.1 Exerciţii rezolvate

Exerciţiul 4.1.1. *Folosind definiţia limitei unei funcţii într–un punct, să se demonstreze că :*

$$\boldsymbol{a})\quad \lim_{(x,y)\to(1,2)}(x^2+xy)=3;\quad \boldsymbol{b})\quad \lim_{(x,y)\to(3,+\infty)}\frac{xy-1}{y+1}=3;\quad \mathbf{c})\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}=0.$$

Soluţie. **a**) Considerăm metrica pe $I\!R^2$

$$d_1(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)=\max\{|x-x_0|,|y-y_0|\},\quad \mathbf{x}=(x,y),\quad \mathbf{x}_0=(x_0,y_0).$$

Atunci, inegalitatea $d_1(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)<\delta$ este echivalentă cu $|x-x_0|<\delta$ şi $|y-y_0|<\delta.$

Trebuie să arătăm că pentru orice $\varepsilon>0$ putem determina $\delta=\delta(\varepsilon)>0,$ astfel încât de îndată ce

$$|x-1|<\delta,\ \ |y-2|<\delta,$$

să rezulte

$$|f(x,y)-3|<\varepsilon,$$

unde funcţia f este

$$f:I\!R^2\to I\!R,\qquad f(x,y)=x^2+xy,\quad \forall\, x,y\in I\!R.$$

Evaluăm diferenţa $|f(x,y)-3|$ astfel încât să punem în evidenţă $|x-1|$ şi $|y-2|$. Avem

$$f(x,y)-3=x^2+xy-3=(x-1)^2+(x-1)\cdot(y-2)+4(x-1)+(y-2),$$

de unde obţinem

$$|f(x,y)-3|<2\,\delta^2+5\,\delta.$$

Inegalitatea $|f(x,y)-3|<\varepsilon$ va fi verificată dacă

$$2\delta^2+5\delta=\varepsilon.$$

Ţinând cont că $\delta>0,$ găsim

$$\delta(\varepsilon)=\frac{-5+\sqrt{25+8\varepsilon}}{4}.$$

Prin urmare,

$$\forall\, \varepsilon > 0\, (\exists)\ \delta = \delta(\varepsilon) = \frac{-5 + \sqrt{25 + 8\varepsilon}}{4}$$

cu proprietatea

$$\forall\, x \in I\!R,\ y \in I\!R \ \text{ cu } \ |x - 1| < \delta,\ \ |y - 2| < \delta \Longrightarrow |f(x, y) - 3| < \varepsilon,$$

şi deci, în baza primei teoreme de caracterizare a limitei unei funcţii, rezultă

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x, y) = \ell = 3.$$

b) Fiind dat $\varepsilon > 0$ oarecare, trebuie să determinăm $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât de îndată ce

$$|x - 3| < \delta(\varepsilon), \quad y > \frac{1}{\delta(\varepsilon)}$$

să fie satisfăcută inegalitatea

$$\Big|\frac{xy - 1}{y + 1} - 3\Big| < \varepsilon,$$

din care va rezulta că limita funcţiei

$$f : I\!R^2 \setminus \{\mathbf{x} = (x, y)|\ y = -1\} \to I\!R, \quad f(x, y) = \frac{xy - 1}{y + 1},$$

în punctul de la infinit de pe dreapta de ecuaţie $x = 3$, este 3.

Pentru aceasta evaluăm diferenţa $|f(x, y) - 3|$ astfel încât să punem în evidenţă $|x - 3|$ şi y.

$$\Big|\frac{xy - 1}{y + 1} - 3\Big| = \Big|x - 3 - \frac{x + 1}{y + 1}\Big| \le |x - 3| + \Big|\frac{x - 3}{y + 1}\Big| + \frac{4}{|y + 1|}.$$

Dacă se consideră $y > 0$, rezultă $\dfrac{1}{|y + 1|} < \dfrac{1}{y}$ astfel că

$$|f(x, y) - 3| < |x - 3| + \frac{|x - 3|}{y} + \frac{4}{y}.$$

Având în vedere că $|x - 3| < \delta$ şi $\dfrac{1}{y} < \delta$, obţinem

$$|f(x, y) - 3| < \delta + \delta^2 + 4\,\delta = \delta^2 + 5\,\delta.$$

Constatăm că $|f(x, y) - 3| < \varepsilon$ dacă

$$\delta^2 + 5\,\delta = \varepsilon.$$

De aici, ţinând cont că $\delta > 0$, deducem

$$\delta(\varepsilon) = \frac{-5 + \sqrt{25 + 4\varepsilon}}{2}.$$

Rezultatele stabilite pot fi expuse şi astfel: pentru orice vecinătate de forma $V = (3 - \varepsilon, 3 + \varepsilon)$ a punctului $\ell = 3$ există o vecinătate a lui $(3, \infty)$ de forma $U = (3 - \delta(\varepsilon), 3 + \delta(\varepsilon)) \times \Big(\dfrac{1}{\delta(\varepsilon)}, +\infty\Big)$ cu proprietatea că

$$\forall\, (x, y) \in U \quad \Longrightarrow \quad f(x, y) \in V,$$

şi deci limita funcţiei f în $(3, \infty)$ este 3.

c) Cum $x^2 + y^2 = (|x| + |y|)^2 - 2\,|x| \cdot |y|$, presupunând $|x| < \delta$, $|y| < \delta$, obţinem:

$$\frac{x^2 + y^2}{|x| + |y|} = |x| + |y| - \frac{2|x| \cdot |y|}{|x| + |y|} \le |x| + |y| < 2\delta.$$

Dacă se impune ca $2\delta = \varepsilon$ rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta = \delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{2}$, astfel încât

$$|x| < \delta,\ |y| < \delta \implies |f(x, y)| < \varepsilon,$$

ceea ce înseamnă că $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} f(x, y) = 0$. ∎

Exerciţiul 4.1.2. *Se dă funcţia* $f : I\!R^2 \to I\!R$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3xy^2}{2x^2 + 9y^4}, & \textit{dacă} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \textit{dacă} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Să se arate că funcţia f *nu are limită în origine.*

Soluţie. Pentru calculul limitei $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$ vom considera că $x \to 0$, $y \to 0$ pe unul din elementele familiei uniparametrice de parabole $\{y^2 = mx :\ m \in I\!R\}$. Avem:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y^2=mx}} f(x, y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y^2=mx}} \frac{3mx^2}{x^2(2 + 9m^2)} = \frac{3m}{2 + 9m^2}.$$

Deoarece limita obţinută depinde de parametrul familiei de parabole, rezultă că ea nu este unică. Deci funcţia f nu are limită în origine. ∎

Exerciţiul 4.1.3. *Funcţia*

$$f : I\!R^2 \setminus \{\mathbf{0} = (0, 0)\} \to I\!R, \quad f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2},$$

nu are limită în origine.

Soluţie. Într-adevăr, şirul $(\mathbf{z}_n)_{n\geq 1}$, $\mathbf{z}_n \in I\!R^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\mathbf{z}_n = \left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{\lambda}{n}\right)$, $\lambda \in I\!R$, este convergent la $\mathbf{0} = (0, 0)$. Şirul valorilor funcţiei are termenul general

$$f(\mathbf{z}_n) = f\left(\frac{1}{n}, \frac{\lambda}{n}\right) = \frac{\dfrac{\lambda}{n^2}}{\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{\lambda^2}{n^2}} = \frac{\lambda}{1 + \lambda^2},$$

de unde $\lim\limits_{n\to\infty} f(\mathbf{z}_n) = \dfrac{\lambda}{1 + \lambda^2}$ şi deci limita şirului $(f(\mathbf{z}_n))$ depinde de λ. De exemplu, pentru $\lambda = 2$, $\mathbf{z}_n = \left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}\right)$ avem $f(\mathbf{z}_n) \to \dfrac{2}{5}$, iar pentru $\lambda = -1$, $\mathbf{z}_n = \left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{-1}{n}\right)$, $f(\mathbf{z}_n) \to -\dfrac{1}{2}$.

Aşadar, există două şiruri de puncte convergente la $\mathbf{0}$ pentru care şirurile valorilor funcţiei converg la limite diferite, ceea ce demonstrează că funcţia f nu are limită în origine.

Termenii şirului de vectori $(\mathbf{z}_n)_{n\geq 1}$ sunt situaţi pe dreapta $y = \lambda x$ care trece prin origine. Dacă se efectuează limita funcţiei f pentru $(x, y) \to (0, 0)$, cu (x, y) aparţinând acestei drepte, limita depinde de λ şi deci funcţia f nu are limită în origine. ∎

Exercițiul 4.1.4. *Să se calculeze limitele:*

$a)\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1};\quad f)\ \lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2};\quad k)\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1};$

$b)\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to2}}\dfrac{\sin xy}{x};\quad g)\ \lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4};\quad l)\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{x^2y^2(x^2+y^2)};$

$c)\ \lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2+y^2};\quad h)\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\Big(x^2+y^2\Big)^{x^2y^2};\quad m)\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\Big(1+x^2y^2\Big)^{-\frac{1}{x^2+y^2}};$

$d)\ \lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to k}}\Big(1+\dfrac{y}{x}\Big)^x;\quad i)\ \lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}(x^2+y^2)\,e^{-(x+y)};\quad n)\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2};$

$e)\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0\\z\to0}}\dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2};\quad j)\ \lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty\\z\to\infty}}\Big(\dfrac{\sqrt[3]{xyz}}{x+y+z}\Big)^{x^2+y^2};\quad o)\ \lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to0\\z\to1}}\dfrac{e^{x-y+z}}{z^2+\cos\sqrt{xy}}.$

Soluție. $a)$ Trecând formal la limită se obține cazul de nedeterminare $0/0.$ Întrucât nedeterminarea provine din funcții iraționale, amplificăm fracția cu conjugata $1+\sqrt{xy+1}$ a numitorului. Obținem:

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy(1+\sqrt{xy+1})}{xy+1-1}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}(\sqrt{xy+1}+1)=2.$$

$b)$ Avem aceeași nedeterminare. Vom înmulți numărătorul și numitorul fracției cu $y.$ Obținem:

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to2}}\frac{\sin xy}{x}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to2}}y\cdot\frac{\sin xy}{xy}=\lim_{y\to2}y\cdot\lim_{\substack{x\to0\\y\to2}}\frac{\sin xy}{xy}=\lim_{y\to2}y\cdot\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=2.$$

$c)$ Pentru $x>0$ și $y>0,$ avem:

$$0<\frac{x+y}{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+y^2}+\frac{y}{x^2+y^2}\le\frac{x}{x^2}+\frac{y}{y^2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}.$$

Trecând la limită în aceste inegalități și ținând cont că $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\Big(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\Big)=0,$ deducem că $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2+y^2}=0.$

$d)$ Prin trecere formală la limită se obține nedeterminarea 1^∞ pe care o vom înlătura folosind limita fundamentală $\lim\limits_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e.$ Avem:

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\y\to k}}\Big(1+\frac{y}{x}\Big)^x=\lim_{\substack{x\to\infty\\y\to k}}\Big[\Big(1+\frac{y}{x}\Big)^{\frac{x}{y}}\Big]^y=e^k.$$

$e)$ Făcând precizarea că $xyz\neq0,$ din inegalitatea mediilor obținem:

$$\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\le\frac{1}{3\sqrt[3]{(xyz)^2}}.$$

Înmulțind ambii membri ai acestei inegalități cu $|xyz|,$ deducem:

$$|f(x,y,z)|=\Big|\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}\Big|\le\frac{\sqrt[3]{|xyz|}}{3}.$$

Ținând cont de proprietățile trecerii la limită în inegalități avem:

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0\\z\to0}}|f(x,y,z)|=0\implies\lim_{\substack{x\to0\\y\to0\\z\to0}}f(x,y,z)=0.$$

f) Să observăm că $(x-y)^2 \geq 0 \iff x^2 - xy + y^2 \geq xy$. De asemenea, $x^2+y^2 \geq 0 \Longleftrightarrow x^2 - xy + y^2 \geq -xy$, deci $|x^2 - xy + y^2| = x^2 - xy + y^2 \geq |xy|$. Atunci, pentru $x \neq 0$ şi $y \neq 0$, deducem:

$$\frac{|x+y|}{|x^2-xy+y^2|} \leq \frac{|x+y|}{|xy|} \leq \frac{|x|+|y|}{|x|\cdot|y|} = \frac{1}{|x|} + \frac{1}{|y|} \to 0, \quad \text{când} \quad x \to \infty,\ y \to \infty,$$

de unde rezultă că limita funcţiei în origine este egală cu 0.

g) Deoarece se cere limita unei funcţii de două variabile pentru $x \to \infty$ şi $y \to \infty$, putem considera $x > 0$ şi $y > 0$. Avem:

$$0 < \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4} = \frac{x^2}{x^4+y^4} + \frac{y^2}{x^4+y^4} \leq \frac{x^2}{x^4} + \frac{y^2}{y^4} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \to 0, \text{ când } x \to \infty, y \to \infty.$$

Aşadar, limita funcţiei în origine este 0.

h) Pornim de la inegalitatea evidentă

$$(x^2+y^2)^2 \geq 4x^2y^2$$

din care deducem

$$x^2y^2 \leq \frac{1}{4}(x^2+y^2)^2.$$

Deoarece $x \to 0$ şi $y \to 0$ rezultă că putem considera o vecinătate V a originii în care să avem

$$0 < x^2+y^2 < 1, \forall\,(x,y) \in V \setminus \{(0,0)\}.$$

Putem scrie:

$$1 > (x^2+y^2)^{x^2y^2} \geq \left(x^2+y^2\right)^{\frac{(x^2+y^2)^2}{4}} = t^{\frac{t^2}{4}},$$

unde $t = x^2+y^2$. Cum $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} t^{\frac{t^2}{4}} = 1$, după trecerea la limită în aceste inegalităţi găsim că limita cerută este 1.

i) Deoarece se cere să se determine limita funcţiei $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-(x+y)}$ pentru $x \to \infty$ şi $y \to \infty$, putem considera $x > 0$ şi $y > 0$. Avem:

$$0 < f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-(x+y)} = \frac{x^2+y^2}{e^{x+y}} = \frac{x^2+y^2}{e^x e^y} \leq \frac{x^2}{e^x} + \frac{y^2}{e^y}.$$

Cum $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{t^2}{e^t} = 0$, după trecerea la limită în ultimele inegalităţi obţinem:

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} (x^2+y^2)e^{-(x+y)} = 0.$$

j) Şi aici putem considera $x > 0$, $y > 0$ şi $z > 0$. Din inegalitatea mediilor, avem:

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz} \Longrightarrow \left(\frac{\sqrt[3]{xyz}}{x+y+z}\right)^{x^2+y^2} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+y^2}.$$

Cum $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x^2+y^2} = 0$ rezultă că $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \left(\dfrac{\sqrt[3]{xyz}}{x+y+z}\right)^{x^2+y^2} = 0$.

k) Se procedează la fel ca la punctul *a*). Se găseşte

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = 2.$$

l) Cum $1-\cos(x^2+y^2)=2\sin^2\dfrac{x^2+y^2}{2}$, avem

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{x^2y^2(x^2+y^2)}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2\sin^2\dfrac{x^2+y^2}{2}}{x^2y^2(x^2+y^2)}=\frac{1}{2}\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\Big(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\Big)=\infty.$$

m) Cazul de nedeterminare $\dfrac{0}{0}$ îl vom înlătura folosind o limită fundamentală. Obţinem

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\Big(1+x^2y^2\Big)^{-\dfrac{1}{x^2+y^2}}=$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\Big[\Big(1+x^2y^2\Big)^{\dfrac{1}{x^2y^2}}\Big]^{-\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}}=e^{-\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}}.$$

Însă $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}=0$. Urmează că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=1$.

n) Folosind $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=1$ deducem:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x+y)(1-\frac{xy}{x^2+y^2})=0.$$

Ultima limită este 0 pentru că $x+y\to 0$ când $x\to 0$ şi $y\to 0$, iar funcţia

$$g(x,y)=1-\frac{xy}{x^2+y^2},\quad (x,y)\neq(0,0)$$

este mărginită deoarece are valorile în compactul $[1/2,3/2]$.

o) Avem: $\lim\limits_{(x,y,z)\to(1,0,1)} f(x,y,z)=\lim\limits_{(x,y,z)\to(1,0,1)}\dfrac{e^{x-y+z}}{z^2+\cos\sqrt{xy}}=f(1,0,1)=\dfrac{1}{2}e^2.$ ■

Exerciţiul 4.1.5. *Se dă funcţia* $f\in\mathcal{F}(I\!R^2\setminus\{(0,0)\},I\!R)$,

$$f(x,y)=(x+y)\cdot\sin\frac{1}{x}\cdot\sin\frac{1}{y},\quad x\neq 0,\ y\neq 0.$$

Să se arate că :

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$; *b*) $\lim\limits_{x\to 0}\Big(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\Big)$ *nu există*; *c*) $\lim\limits_{y\to 0}\Big(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\Big)$ *nu există.*

Soluţie. *a*) Pentru că funcţia $t\to\sin\dfrac{1}{t}$ este mărginită, avem:

$$\sin\frac{1}{x}\cdot\sin\frac{1}{y}\in[-1,1],\ \forall\, x\neq 0, y\neq 0.$$

Ţinând cont că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} |x+y| = 0$, deducem:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} |f(x,y)| = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left|(x+y)\cdot \sin\frac{1}{x}\cdot \sin\frac{1}{y}\right| \le \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} |x+y| = 0,$$

din care, utilizând proprietăţi ale limitei unei funcţii, obţinem

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0.$$

b) Nu există $\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ pentru că se pot găsi cel puţin două şiruri diferite $(y_n)_{n\ge 1}$ cu $y_n \ne 0$ şi $y_n \to 0$ pentru care limitele $\lim\limits_{n\to\infty} f(x,y_n)$ sunt diferite.

Aşadar $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right)$ nu există.

c) Nu există $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ pentru că se pot găsi cel puţin două şiruri diferite $(x_n)_{n\ge 1}$ cu $x_n \ne 0$ şi $x_n \to 0$ pentru care limitele $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n,y)$ sunt diferite.

Aşadar $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right)$ nu există.

■

Exerciţiul 4.1.6. *Să se arate că funcţia reală de două variabile reale*

$$f: I\!R^2 \setminus \{(x,y)|:\ x^2+y^2=1\} \to I\!R, \quad f(x,y) = \sin\frac{\pi}{1-x^2-y^2}.$$

nu este uniform continuă.

Soluţie. Vom arăta că pentru $\varepsilon_0 = 1$ şi $\forall \delta > 0$ se pot preciza punctele $M'_\delta(x'_\delta, y'_\delta)$, $M''_\delta(x''_\delta, y''_\delta)$, cu $d(M'_\delta, M''_\delta) < \delta$, care să implice

$$|f(M'_\delta) - f(M''_\delta)| \ge \varepsilon_0,$$

unde $d(\cdot,\cdot)$ este **metrica Euclidiană** pe $I\!R^2$.

Punctele le determinăm din condiţiile $f(M'_\delta) = 0$ şi $f(M''_\delta) = 1$, deci din ecuaţiile

$$\frac{\pi}{1-{x'_\delta}^2-{y'_\delta}^2} = 2n\pi, \quad \frac{\pi}{1-{x''_\delta}^2-{y''_\delta}^2} = 2n\pi + \frac{\pi}{2}, \quad n \in I\!N^*.$$

Trecem indicele "δ" în n şi alegem x'_n, x''_n, y'_n şi y''_n după cum urmează:

$$x'_n = x''_n = \frac{1}{n}; \quad y'_n = \sqrt{1-\frac{1}{2n}-\frac{1}{n^2}}; \quad y''_n = \sqrt{1-\frac{2}{4n+1}-\frac{1}{n^2}}.$$

Deoarece $y'_n \to 1$ şi $y''_n \to 1$, rezultă că $y''_n - y'_n \to 0$ şi deci pentru orice $\delta > 0$ există numărul natural $N(\delta)$ astfel încât pentru orice $n > N(\delta)$ să avem $y''_n - y'_n < \delta$.

Cum distanţa dintre punctele M'_n şi M''_n este

$$d(M'_n, M''_n) = \sqrt{(x'_n - x''_n)^2 + (y'_n - y''_n)^2} = |y'_n - y''_n| = y''_n - y'_n,$$

avem $d(M'_n, M''_n) < \delta$ dacă $n > N(\delta) \in I\!N$.

Acest raţionament demonstrează că funcţia f nu este uniform continuă. ■

4.2 Exerciţii propuse cu indicaţii şi răspunsuri

Exercițiul 4.2.1. *Să se discute în raport cu parametrul real α continuitatea următoarelor funcții:*

$$1^0.\quad f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ \alpha, & (x,y)=(0,0);\end{cases}$$

$$2^0.\quad f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{\mathrm{tg}\,(x^2+y^2)}, & (x,y)\neq(0,0)\\ \alpha, & (x,y)=(0,0);\end{cases}$$

$$3^0.\quad f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{(x+y+z)\mathrm{tg}\,(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2}, & (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ \alpha, & (x,y,z)=(0,0,0).\end{cases}$$

Indicație. Pentru limita ℓ în origine a fiecăreia dintre funcții se găsește: 1^0. ℓ nu există; 2^0. $\ell=\dfrac{1}{2}$; 3^0. $\ell=0$. În calcule intervin limitele fundamentale: $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin u}{u}=1$; $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\,u}{u}=1$ ■

Răspuns. Prima funcție este discontinuă $\forall\,\alpha\in I\!R$, a doua este continuă pentru $\alpha=\dfrac{1}{2}$, iar a treia este continuă pentru $\alpha=0$. ■

Exercițiul 4.2.2. *Să se arate că funcția $f(x,y)=\arcsin\dfrac{y}{x}$ nu este uniform continuă.*

Indicație. Se procedează la fel ca în Exercițiul 4.1.6. ■

Răspuns. Rezultă că funcția f nu este uniform continuă. ■

Exercițiul 4.2.3. *Fie funcția vectorială de variabilă vectorială*

$$\mathbf{f}:I\!R^n\to I\!R^3,\qquad \mathbf{f}(\mathbf{x})=\begin{cases}\left(e^{-\frac{1}{\|\mathbf{x}\|}},\ \|\mathbf{x}\|\sin\dfrac{1}{\|\mathbf{x}\|},\ \|\mathbf{x}\|^{x_1}\right), & \textit{dacă } \mathbf{x}\neq\mathbf{0},\\ (0,\ 0,\ 1), & \textit{dacă } \mathbf{x}=\mathbf{0},\end{cases}$$

unde $\mathbf{x}=(x_1,x_2,...,x_n)\in I\!R^n$ și mulțimile:

$$A=\{\mathbf{x}\in I\!R^n;\sum_{k=1}^{n}|x_k|\leq 1\};\quad B=\left\{\mathbf{y}=(y_1,y_2,y_3)\in I\!R^3:\frac{y_1^2}{9}+\frac{y_2^2}{4}+y_3^2\leq 1\right\}.$$

Să se arate că :

(**a**) *A și B sunt mulțimi închise în $I\!R^n$ și respectiv în $I\!R^3$;*

(**b**) *$\mathbf{f}(A)$ este o mulțime compactă și conexă în $I\!R^3$;*

(**c**) *$\mathbf{f}^{-1}(B)$ este o mulțime închisă în $I\!R^n$.*

Indicaţie. Funcţiile coordonate f_1, f_2, f_3 ale funcţiei date sunt funcţiile reale de n variabile reale

$$f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{cases} e^{-\dfrac{1}{\|\mathbf{x}\|}}, & \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \\ 0, & \mathbf{x} = \mathbf{0}, \end{cases}$$

$$f_2(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{cases} \|\mathbf{x}\| \sin \dfrac{1}{\|\mathbf{x}\|}, & \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \\ 0, & \mathbf{x} = \mathbf{0}, \end{cases}$$

$$f_3(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{cases} \|\mathbf{x}\|^{x_1}, & \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \\ 1, & \mathbf{x} = \mathbf{0}, \end{cases}$$

unde $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ este norma Euclidiană pe $I\!R^n$.

Este uşor de verificat că f_1, f_2, f_3 sunt continue pe $I\!R^n$, deci $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ este funcţie continuă.

(**a**) Mulţimea A este bila închisă cu centrul în origine şi rază 2 din spaţiul metric $(I\!R^n, d_2)$, unde

$$d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n), \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n) \in I\!R^n,$$

deci este o mulţime închisă în $I\!R^n$.

Considerăm funcţia reală

$$\varphi : I\!R^3 \to I\!R, \quad \varphi(y_1, y_2, y_3) = \frac{y_1^2}{9} + \frac{y_2^2}{4} + y_3^2,$$

care este continuă. Atunci $B = \varphi^{-1}([0, 1])$ este o mulţime închisă în $I\!R^3$ (contraimaginea prin funcţia continuă φ a compactului $[0, 1]$).

(**b**) Deoarece o bilă închisă în spaţiul Euclidian $I\!R^n$ este mulţime compactă în $I\!R^n$ (mărginită şi închisă în $I\!R^n$) şi conexă în $I\!R^n$, rezultă că mulţimea A este o mulţime compactă şi conexă în $I\!R^n$.

Întrucât f este funcţie continuă şi A este o mulţime compactă şi conexă în $I\!R^n$, rezultă că $f(A)$ este mulţime compactă şi conexă în $I\!R^3$.

(**c**) Mulţimea B fiind închisă şi f fiind funcţie continuă, rezultă că $f^{-1}(B)$ este mulţime închisă în $I\!R^n$. ■

Exerciţiul 4.2.4. *Fie* $(V, \|\cdot\|)$ *un spaţiu normat. Funcţia* $f : V \to I\!R, \quad f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$ *este continuă pe* V.

Indicaţie. Avem $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| = |\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{x}_0\|| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$. **Răspuns**. Fie $\varepsilon > 0$. Luând $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$, atunci $\forall \mathbf{x} \in V$ cu $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| = d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < \delta(\varepsilon) \Longrightarrow |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| < \varepsilon$, adică f este continuă în $\mathbf{x}_0$. Cum $\mathbf{x}_0$ este arbitrar din V, rezultă că f este continuă pe V. ■

Exerciţiul 4.2.5. *Să se arate că funcţia*

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}, & \textit{dacă} \quad x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \textit{dacă} \quad x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

este continuă în raport cu fiecare variabilă în parte, dar nu este continuă în raport cu ansamblul variabilelor.

Indicaţie. Se arată uşor că funcţia f este continuă în raport cu fiecare variabilă în parte, dar nu este continuă în raport cu ansamblul variabilelor. ■

4.3 Întrebări de autoevaluare

1°. Care este deosebirea dintre **continuitate** şi **uniforma continuitate** a unei funcţii definită pe un spaţiu metric cu valori într–un alt spaţiu metric? ■

2°. Ce se poate afirma despre **funcţiile continue pe mulţimi conexe**? Dar pe mulţimi convexe? Demonstraţi cel puţin una dintre afirmaţii. ■

3°. Orice **spaţiu metric conex prin arce** este **spaţiu metric conex**? Dacă răspunsul este da, demonstraţi afirmaţia. ■

4°. Fie funcţia vectorială de argument vectorial

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2, ..., f_m) : A \subset I\!R^n \to I\!R^m.$$

Dacă A este o **mulţime mărginită şi închisă** şi $\mathbf{f}$ este funcţie continuă, mulţimea $\operatorname{Im}\mathbf{f} = \mathbf{f}(A) \subset I\!R^m$ este mărginită şi închisă? Dacă răspunsul este da, să se demonstreze afirmaţia. ■

5°. Ce este o **funcţie Hölder**, sau **funcţie hölderiană**? Dar o **funcţie Lipschitz**? ■

Capitolul 5

MC. 05 – Derivabilitatea şi diferenţiabilitatea funcţiilor reale

5.1 Derivabilitatea şi diferenţiabilitatea funcţiilor vectoriale de variabilă reală

5.1.1 Exerciţii rezolvate

Exerciţiul 5.1.1. *Să se arate că fiecare dintre imaginile următoarelor drumuri parametrizate:*

$$(\mathit{1})\quad \mathbf{r}:[1,e]\to \mathbb{R}^3,\quad \mathbf{r}(t)=(t^2-1)\mathbf{i}+t^2\mathbf{j}+(\ln t)\,\mathbf{k};$$
$$(\mathit{2})\quad \mathbf{r}:[0,1]\to \mathbb{R}^3,\quad \mathbf{r}(t)=(2t^3+t^2)\mathbf{i}+(t^2-2t)\mathbf{j}+(t^3+t-1)\mathbf{k}$$

este situată într–un plan a cărui ecuaţie se cere a fi determinată.

Soluţie. (**1**) Ecuaţiile parametrice ale primului drum sunt

$$\begin{cases} x &= t^2-1\\ y &= t^2\\ z &= \ln t,\quad t\in[1,e] \end{cases}.$$

Eliminarea parametrului t între primele două ecuaţii conduce la egalitatea $x-y+1=0$, care reprezintă ecuaţia unui plan paralel cu axa Oz.

Prin urmare imaginea primului drum parametrizat este situată în planul de ecuaţie $x-y+1=0$.

(**2**) Ecuaţiile parametrice ale drumului sunt

$$\begin{cases} x &= 2t^3+t^2\\ y &= t^2-2t\\ z &= t^3+t-1,\quad t\in[0,1] \end{cases}.$$

Ecuaţia unui plan care ar putea conţine imaginea drumului considerat este $Ax+By+Cz+D=0$, unde coeficienţii A,B,C,D urmează a fi determinaţi.

Impunând ca imaginea drumului să aparţină acestui plan, se obţine

$$A(2t^3+t^2)+B(t^2-2t)+C(t^3+t-1)+D=0,\quad t\in[0,1],$$

de unde, prin identificarea coeficienţilor, deducem sistemul liniar omogen

$$\begin{cases} 2A + C &= 0 \\ A + B &= 0 \\ 2B - C &= 0 \\ D - C &= 0 \end{cases}$$

care are o infinitate simplă de soluţii, şi anume: $B = -A$; $C = -2A$; $D = -2A$.

Prin urmare, imaginea drumului se găseşte în planul $Ax - Ay - 2Az - 2A = 0$.

Simplificând prin A, obţinem că ecuaţia planului căutat este $x - y - 2z - 2 = 0$. ■

Exerciţiul 5.1.2. *Fie curba în spaţiu*

$$\mathbf{r} : [0, 2\pi] \to I\!R^3, \quad \mathbf{r}(t) = e^t \cos t\mathbf{i} + e^t \sin t\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}.$$

Determinaţi parametrizarea naturală a curbei, lungimea ei şi versorii triedrului Frenet într-un punct oarecare al curbei.

Soluţie. Cum $\dot{\mathbf{r}}(t) = e^t(\cos t - \sin t)\mathbf{i} + e^t(\sin t + \cos t)\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}$, urmează că $||\dot{\mathbf{r}}(t)|| = \sqrt{3}e^t$. De aici, elementul de arc ds al curbei este dat de relaţia $ds = \sqrt{3}e^t dt$, deci $s = \sqrt{3}e^t + C$.

Presupunând că originea de arc pe curbă corespunde lui $t = 0$, obţinem $C = -\sqrt{3}$, deci $s = \sqrt{3}(e^t - 1)$.

Prin urmare, parametrizarea naturală a curbei este

$$\mathbf{r} = \left(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1\right) \cos \ln \left(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1\right) \mathbf{i} + \left(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1\right) \sin \ln \left(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1\right) \mathbf{j} + \left(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1\right) \mathbf{k}, \quad s \in [0, \sqrt{3}(e^{2\pi} - 1)].$$

Lungimea curbei este

$$\mathcal{L} = \int_0^{2\pi} \|\dot{\mathbf{r}}(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{3}e^t dt = \sqrt{3}(e^{2\pi} - 1),$$

iar versorii triedrului Frenet $\boldsymbol{\tau}(s)$, $\boldsymbol{\nu}(s)$ şi $\boldsymbol{\beta}(s)$ sunt daţi de relaţiile

$$\begin{cases} \boldsymbol{\tau}(s) = \dfrac{d\mathbf{r}}{ds}, \\[2ex] \boldsymbol{\nu}(s) = \dfrac{\dfrac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}}{\left\|\dfrac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right\|}, \\[4ex] \boldsymbol{\beta}(s) = \boldsymbol{\tau}(s) \times \boldsymbol{\nu}(s) = \dfrac{\dfrac{d\mathbf{r}}{ds} \times \dfrac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}}{\left\|\dfrac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right\|}. \end{cases}$$

Efectuând calculele, găsim

$$\begin{cases} \boldsymbol{\tau}(s) &= \dfrac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \left[\cos \ln \left(\dfrac{s}{\sqrt{3}} + 1\right) - \sin \ln \left(\dfrac{s}{\sqrt{3}} + 1\right)\right] \mathbf{i} + \left[\cos \ln \left(\dfrac{s}{\sqrt{3}} + 1\right) + \sin \ln \left(\dfrac{s}{\sqrt{3}} + 1\right)\right] \mathbf{j} + \mathbf{k} \right\}, \\ \boldsymbol{\nu}(s) &= \dfrac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \left[-\cos \ln \left(\dfrac{s}{\sqrt{3}} + 1\right) - \sin \ln \left(\dfrac{s}{\sqrt{3}} + 1\right)\right] \mathbf{i} + \left[\cos \ln \left(\dfrac{s}{\sqrt{3}} + 1\right) - \sin \ln \left(\dfrac{s}{\sqrt{3}} + 1\right)\right] \mathbf{j} \right\}, \\ \boldsymbol{\beta}(s) &= \dfrac{1}{\sqrt{6}} \left\{ \left[\sin \ln \left(\dfrac{s}{\sqrt{3}} + 1\right) - \cos \ln \left(\dfrac{s}{\sqrt{3}} + 1\right)\right] \mathbf{i} - \left[\cos \ln \left(\dfrac{s}{\sqrt{3}} + 1\right) + \sin \ln \left(\dfrac{s}{\sqrt{3}} + 1\right)\right] \mathbf{j} + 2\mathbf{k} \right\}. \end{cases}$$

■

Exerciţiul 5.1.3. *Determinaţi ecuaţia tangentei la curba definită de drumul*

$$\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I\!R, I\!R^3), \quad \mathbf{f}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2\sin t\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}$$

în punctul M_0 *corespunzător valorii* $\dfrac{\pi}{6}$ *a parametrului* t.

Soluţie. Un vector director al tangentei la curbă într-un punct M corespunzător valorii t a parametrului este

$$\mathbf{f}'(t) = -2\sin t\,\mathbf{i} + 2\cos t\,\mathbf{j} + 4\mathbf{k}.$$

De aici, un vector director pentru tangenta în M_0 este

$$\mathbf{f}'\Big(\frac{\pi}{6}\Big) = -\mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j} + 4\mathbf{k}.$$

Cum $M_0\Big(\sqrt{3}, 1, \dfrac{2\pi}{3}\Big)$, urmează că ecuaţiile canonice ale tangentei în M_0 la curbă sunt

$$\frac{x-\sqrt{3}}{-1} = \frac{y-1}{\sqrt{3}} = \frac{z-\dfrac{2\pi}{3}}{4}.$$

■

Exerciţiul 5.1.4. *Fie curba definită de drumul*

$$\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I\!R, I\!R^3), \quad \mathbf{f}(t) = e^t\cos t\mathbf{i} + e^t\sin t\mathbf{j} + e^{-2t}\mathbf{k}.$$

Determinaţi punctele curbei în care tangenta este paralelă cu dreapta $(D): \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+3}{1} = \dfrac{z-1}{-2}$.

Soluţie. Un vector director pentru tangenta în punctul curent M de pe curbă corespunzător valorii t a parametrului este

$$\mathbf{f}'(t) = e^t(\cos t - \sin t)\mathbf{i} + e^t(\cos t + \sin t)\mathbf{j} - 2e^{-2t}\mathbf{k}.$$

Un vector director al dreptei (D) fiind $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, impunând condiţia de paralelism $\mathbf{f}'(t) = c\mathbf{v}$, $c \in I\!R$, obţinem

$$e^t(\cos t - \sin t) = c, \quad e^t(\cos t + \sin t) = c, \quad -2e^{-2t} = -2c.$$

Din cea de-a treia ecuaţie obţinem că $c = e^{-2t}$. Ridicând la pătrat fiecare dintre primele două ecuaţii şi sumând rezultatele, deducem $c^2 = e^{2t}$. Prin înmulţirea ultimelor două egalităţi găsim $c^3 = 1$, de unde aflăm că $c = 1$, ceea ce implică $e^t = 1$ şi deci $t = 0$.

Prin urmare, punctul M_0 de pe curbă în care tangenta este paralelă cu dreapta (D) este cel corespunzător valorii $t = 0$ a parametrului. Găsim $M_0(1, 0, 1)$. ■

Exerciţiul 5.1.5. *Determinaţi ordinul de contact în origine al curbelor plane*

$$(C_1): x = t^3 - 3t^2, \quad t \in I\!R; \quad (C_2): x = t^2, \quad t \in I\!R.$$

Soluţie. Funcţiile din teorie (vezi MC.05) sunt $f, g : I\!R \to I\!R$, unde $f(t) = t^3 - 3t^2$ şi $g(t) = t^2$. Observăm că originea corespunde valorii $t = 0$.

Derivatele de ordinul întâi şi doi ale funcţiilor f şi g au expresiile:

$$f'(t) = 3t^2 - 6t; \quad g'(t) = 2t; \qquad f''(t) = 6t - 6; \qquad g''(t) = 2.$$

Cum:

$$f(0) = g(0) = 0; \qquad f'(0) = g'(0) = 0; \qquad f''(0) = 0 \neq g''(0) = 2,$$

urmează că (C_1) şi (C_2) au în origine un contact de ordinul întâi. ■

5.1.2 Exerciţii propuse cu indicaţii şi răspunsuri

Exerciţiul 5.1.6. *Determinaţi parametrizarea naturală a curbei*

$$\mathbf{r} : [0, 2\pi] \to I\!R^3, \quad \mathbf{r}(t) = (t - \sin t)\mathbf{i} + (1 - \cos t)\mathbf{j} + 4 \sin \frac{t}{2}\mathbf{k}.$$

Indicaţie. Determinând $ds = ||\dot{\mathbf{r}}(t)||dt$ găsiţi $ds = 2dt$. ■

Răspuns. Parametrizarea naturală a curbei este $\mathbf{r} = \left(\frac{s}{2} - \sin \frac{s}{2}\right)\mathbf{i} + \left(1 - \cos \frac{s}{2}\right)\mathbf{j} + 4 \sin s\mathbf{k}, \quad s \in [0, \pi]$. ■

Exerciţiul 5.1.7. *Să se găsească vectorul viteză, vectorul acceleraţie, viteza şi acceleraţia la momentul* t *ale particulei materiale care se mişcă după legea*

$$\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I\!R_+, I\!R^3), \quad \mathbf{f}(t) = (3t^2 - 3)\mathbf{i} + 10t\mathbf{j} - 4t^2\mathbf{k}.$$

Indicaţie. Vectorul viteză $\mathbf{v}(t)$ la momentul t este $\mathbf{f}'(t)$, iar viteza $v(t) = \|\mathbf{v}(t)\|$ este $\|\mathbf{f}'(t)\|$. Vectorul acceleraţie $\mathbf{a}(t)$ la momentul t este $\mathbf{f}''(t)$, iar acceleraţia $a(t) = \|\mathbf{a}(t)\|$ este $\|\mathbf{f}''(t)\|$. ■

Răspuns. $\mathbf{v}(t) = 6t\mathbf{i} + 10\mathbf{j} - 8t\mathbf{k}$; $\quad v(t) = 10\sqrt{1 + t^2}$; $\quad \mathbf{a}(t) = 6\mathbf{i} - 8\mathbf{k}$; $\quad a(t) = 10$. ■

Exerciţiul 5.1.8. *Fie funcţia* $\mathbf{r} = \mathbf{a}\cos\omega t + \mathbf{b}\sin\omega t$, *unde* $\mathbf{a}$ *şi* $\mathbf{b}$ *sunt vectori constanţi, iar* ω *este o constantă reală pozitivă numită* ***frecvenţă***. *Să se arate că*

$$(1) \quad \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \omega\, \mathbf{a} \times \mathbf{b}; \qquad (2) \quad \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \omega^2\mathbf{r} = \mathbf{0}.$$

Indicaţie. Primele două derivate ale funcţiei $\mathbf{r}$ sunt

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\omega(\mathbf{a}\sin\omega t - \mathbf{b}\cos\omega t), \quad \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\omega^2(\mathbf{a}\cos\omega t + \mathbf{b}\sin\omega t) = -\omega^2\mathbf{r}.$$

■

Răspuns. Deoarece $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$, urmează că

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= (\mathbf{a}\cos\omega t + \mathbf{b}\sin\omega t) \times (-\omega(\mathbf{a}\sin\omega t - \mathbf{b}\cos\omega t)) \\ &= \mathbf{a}\cos\omega t \times (-\mathbf{b}\cos\omega t) + \mathbf{b}\sin\omega t \times (-\omega(\mathbf{a}\sin\omega t)) \\ &= \omega\, \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \end{aligned}$$

cea de-a doua egalitate demonstrându-se asemănător. ■

Exerciţiul 5.1.9. *Fie funcţia*

$$f \in \mathcal{F}(I\!R), \quad f(t) = \sqrt[5]{1+t}.$$

Determinaţi aproximările liniară şi pătratică în vecinătatea punctului $t_0 = 0$, precum şi ecuaţia cercului osculator al curbei $(C) : x = f(t),\ t \in I\!R$, în punctul $M_0(0, 1)$.

Indicaţie. Derivatele de ordinul întâi şi al doilea ale lui f sunt date de formulele

$$f'(t) = \frac{1}{5}(1+t)^{-\frac{4}{5}}; \quad f''(t) = -\frac{4}{25}(1+t)^{-\frac{9}{5}}, \quad f'(0) = \frac{1}{5}, f''(0) = -\frac{4}{25}$$

Aproximarea liniară în vecinătatea lui $t_0 = 0$ este

$$f(t) \cong f(t_0) + \frac{t-t_0}{1!} f'(t_0) = P_1(t; t_0, f),$$

iar aproximarea pătratică în vecinătatea lui $t_0 = 0$ este

$$f(t) \cong f(t_0) + \frac{t-t_0}{1!} f'(t_0) + \frac{(t-t_0)^2}{2!} f''(t_0) = P_2(t; t_0, f).$$

Expresiile celor trei numere care definesc cercul osculator sunt

$$\begin{cases} \alpha = t_0 - \dfrac{1+(f'(t_0))^2}{f''(t_0)} f'(t_0) \\ \beta = f(t_0) + \dfrac{1+(f'(t_0))^2}{f''(t_0)} \\ R = \dfrac{(1+(f'(t_0))^2)^{\frac{3}{2}}}{|f''(t_0)|}. \end{cases},$$

unde α şi β sunt coordonatele centrului de curbură, iar numărul pozitiv R este raza de curbură.

■

Răspuns. Aproximările liniară şi pătratică ale lui f în vecinătatea lui $t_0 = 0$ sunt:

$$f(t) \cong 1 + \frac{1}{5}t; \quad f(t) \cong 1 + \frac{1}{5}t - \frac{4}{50}t^2,$$

iar ecuaţia cercului osculator este $\left(x - \dfrac{13}{10}\right)^2 + \left(x + \dfrac{11}{2}\right)^2 = \dfrac{2197}{50}$. ■

Exerciţiul 5.1.10. *Să se scrie formula lui Taylor cu restul lui Peano de ordin n a funcţiei*

$$\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, I\!R^2), \quad \mathbf{f}(t) = (e^{2t}, \ln(1+3t)).$$

în vecinătatea punctului $t_0 = 1$.

Indicaţie. Se calculează derivatele de ordin oarecare $n \in I\!N^*$ ale funcţiilor de coordonate:

$$f_1 \in \mathcal{F}(I), \quad f_1(t) = e^{2t}, \quad f_2 \in \mathcal{F}(I), \quad f_2(t) = \ln(1+3t).$$

■

Răspuns.

$$\mathbf{f}(t) = (e^2, \ln 4) + \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{2^k}{k!} e^2, \frac{(-1)^{k-1} 3^k}{k 4^k}\Big)(t-1)^k + \boldsymbol{\alpha}(t)(t-1)^n.$$

unde $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{F}(D, I\!R^2)$. ■

5.1.3 Întrebări de autoevaluare

1°. Care este raportul incrementar al unei funcţii vectoriale de variabilă reală $\mathbf{f}$ într-un punct dat t_0?

Precizaţi modul de calcul al raportului incrementar cu ajutorul rapoartelor incrementare ale funcţiilor componente.

Ce efect are acest mod de calcul asupra legăturii dintre derivabilitatea funcţiei $\mathbf{f}$ şi derivabilitatea funcţiilor componente? ■

2°. Scrieţi şi demonstraţi formula lui Leibniz de derivare de k ori a produsului funcţiilor $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in C^k(I, \mathbb{R}^m)$. ■

3°. Precizaţi o funcţie $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ care este continuă în $t_0 = 0$ fără a fi derivabilă în t_0. ■

4°. Drumul parametrizat

$$\mathbf{f} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \qquad \mathbf{f}(t) = (R\cos t, R\sin t, ht), \quad R > 0, \quad h \in \mathbb{R}^*,$$

are drept **traiectorie** o buclă dintr-o **elice cilindrică de pas constant**.

Cât este lungimea acestei bucle? ■

5°. Fie curbele plane

$$(C_1) : x = f(t),\ t \in [a, b], \quad (C_2) : x = g(t),\ t \in [a, b].$$

Interpretaţi cu ajutorul noţiunilor de tangentă şi cerc osculator următoarele situaţii:

1. (C_1) şi (C_2) au contact de ordin 0 în $M_1(t_1, x_1)$;
2. (C_1) şi (C_2) au contact de ordin cel puţin 2 în $M_2(t_2, x_2)$.

■

5.2 Diferenţiabilitatea şi derivabilitatea parţială ale funcţiilor reale de mai multe variabile reale

5.2.1 Exerciţii rezolvate

Exerciţiul 5.2.1. *Să se calculeze derivata funcţiei reale de trei variabile reale*

$$f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^3), \quad f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_2 + 4x_3^3$$

în punctul $\mathbf{a} = (2, 1, 1)$ *după direcţia* $\mathbf{v} = (1, 0, 1)$.

Soluţie. Determinăm întâi versorul $\mathbf{s}$ al vectorului $\mathbf{v}$. Deoarece $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{2}$, urmează că

$$\mathbf{s} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\,\mathbf{v} = \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\Big).$$

Derivata funcţiei $\mathbf{f}$ în punctul $\mathbf{a}$ după direcţia de versor $\mathbf{s}$ este dată de

$$\frac{df}{d\mathbf{s}}(\mathbf{a}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{s}) - f(\mathbf{a})}{t} = g'(0),$$

unde g este definită prin

$$g(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{s}) = 3\left(2 + \frac{t\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 2 + 4\left(1 + \frac{t\sqrt{2}}{2}\right)^3.$$

Prin urmare

$$g'(t) = 3\sqrt{2}\left(2 + \frac{t\sqrt{2}}{2}\right) + 6\sqrt{2}\left(1 + \frac{t\sqrt{2}}{2}\right)^2,$$

de unde

$$\frac{df}{d\mathbf{s}}(\mathbf{a}) = g'(0) = 12\sqrt{2}.$$

■

Exerciţiul 5.2.2. *Să se calculeze diferenţiala funcţiei reale de două variabile reale*

$$f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2), \quad f(x_1, x_2) = e^{x_1^2 - x_2^2} \sin 2x_1x_2$$

şi să se demonstreze că derivatele parţiale de ordinul al doilea ale funcţiei f verifică relaţia

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) = 0, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Soluţie. Se obţine:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(e^{x_1^2 - x_2^2}\sin 2x_1x_2\right) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(e^{x_1^2 - x_2^2}\right)\sin 2x_1x_2 + e^{x_1^2 - x_2^2}\frac{\partial}{\partial x_1}(\sin 2x_1x_2)\\
&= 2x_1e^{x_1^2 - x_2^2}\sin 2x_1x_2 + e^{x_1^2 - x_2^2}2x_2\cos 2x_1x_2;\\
\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) &= \frac{\partial}{\partial x_2}\left(e^{x_1^2 - x_2^2}\sin 2x_1x_2\right) = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(e^{x_1^2 - x_2^2}\right)\sin 2x_1x_2 + e^{x_1^2 - x_2^2}\frac{\partial}{\partial x_2}(\sin 2x_1x_2)\\
&= -2x_2e^{x_1^2 - x_2^2}\sin 2x_1x_2 + e^{x_1^2 - x_2^2}2x_1\cos 2x_1x_2
\end{aligned}$$

de unde, conform expresiei diferenţialei de ordinul întâi a unei funcţii

$$df(x_1, x_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2)dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2)dx_2$$

rezultă

$$df(x_1, x_2) = 2e^{x_1^2 - x_2^2}\left[(x_1\sin 2x_1x_2 + x_2\cos 2x_1x_2)\,dx_1 + (x_1\cos 2x_1x_2 - x_2\sin 2x_1x_2)\,dx_2\right].$$

Au loc de asemenea egalităţile

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(2x_1e^{x_1^2 - x_2^2}\sin 2x_1x_2 + e^{x_1^2 - x_2^2}2x_2\cos 2x_1x_2\right)\\
&= 2e^{x_1^2 - x_2^2}\sin 2x_1x_2 + 4x_1^2e^{x_1^2 - x_2^2}\sin 2x_1x_2 + 2x_1e^{x_1^2 - x_2^2}2x_2\cos 2x_1x_2\\
&\quad + 2x_1e^{x_1^2 - x_2^2}2x_2\cos 2x_1x_2 - e^{x_1^2 - x_2^2}4x_2^2\sin 2x_1x_2\\
&= e^{x_1^2 - x_2^2}\left((2 + 4x_1^2 - 4x_2^2)\sin 2x_1x_2 + 8x_1x_2\cos 2x_1x_2\right)
\end{aligned}$$

şi

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) &= \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(-2x_2e^{x_1^2 - x_2^2}\sin 2x_1x_2 + e^{x_1^2 - x_2^2}2x_1\cos 2x_1x_2\right)\\
&= -2e^{x_1^2 - x_2^2}\sin 2x_1x_2 + 4x_2^2e^{x_1^2 - x_2^2}\sin 2x_1x_2 - 2x_2e^{x_1^2 - x_2^2}2x_1\cos 2x_1x_2\\
&\quad - 2x_2e^{x_1^2 - x_2^2}2x_1\cos 2x_1x_2 - e^{x_1^2 - x_2^2}4x_1^2\sin 2x_1x_2\\
&= e^{x_1^2 - x_2^2}\left((-2 - 4x_1^2 + 4x_2^2)\sin 2x_1x_2 - 8x_1x_2\cos 2x_1x_2\right),
\end{aligned}$$

de unde

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1,x_2)+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1,x_2)=0,\quad (x_1,x_2)\in I\!R^2.$$

O funcţie reală f care verifică egalitatea de mai sus se numeşte **funcţie armonică**.
Dacă f are trei variabile reale, egalitatea corespunzătoare celei de mai sus se scrie

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1,x_2,x_3)+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1,x_2,x_3)+\frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}(x_1,x_2,x_3)=0,\quad (x_1,x_2,x_3)\in D\subset I\!R^3,$$

iar f se numeşte de asemenea funcţie armonică. ■

Exerciţiul 5.2.3. *Fie $\varphi\in\mathcal{F}(I\!R)$ o funcţie derivabilă. Demonstraţi că funcţia*

$$\Phi\in\mathcal{F}(I\!R^2,I\!R),\quad \Phi(x,y)=\varphi(x^2+y^2)$$

verifică relaţia

$$y\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,y)-x\frac{\partial\Phi}{\partial y}(x,y)=0,\quad (x,y)\in I\!R^2.$$

Soluţie. Conform formulei de derivare a funcţiilor compuse, au loc relaţiile

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,y)&=\varphi'(x^2+y^2)\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)=2x\varphi'(x^2+y^2)\\ \frac{\partial\Phi}{\partial y}(x,y)&=\varphi'(x^2+y^2)\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)=2y\varphi'(x^2+y^2),\end{aligned}$$

deci

$$y\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,y)-x\frac{\partial\Phi}{\partial y}(x,y)=2xy\varphi'(x^2+y^2)-2xy\varphi'(x^2+y^2)=0,\quad (x,y)\in I\!R^2.$$

■

Exerciţiul 5.2.4. *Demonstraţi că funcţia*

$$f\in\mathcal{F}(I\!R^2),\quad f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

este diferenţiabilă în origine.

Soluţie. Observăm că $f(0,0)=0$, iar

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t^2\sin\frac{1}{|t|}}{t}=\lim_{t\to 0}t\sin\frac{1}{|t|}=0,$$

deoarece $\lim\limits_{t\to 0}t=0$ iar $\left|\sin\dfrac{1}{|t|}\right|\le 1$. Similar,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t^2\sin\frac{1}{|t|}}{t}=\lim_{t\to 0}t\sin\frac{1}{|t|}=0.$$

Definiţia diferenţiabilităţii unei funcţii conduce la egalitatea

$$f(x,y)=\alpha(x,y)\sqrt{x^2+y^2},\quad (x,y)\in I\!R^2,$$

de unde

$$\alpha(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Ţinând seama că

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\alpha(x,y)=0=\alpha(0,0),$$

deoarece $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{x^2+y^2}=0$, iar $\left|\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leq 1$, rezultă concluzia. ■

Exerciţiul 5.2.5. *Precizaţi dezvoltarea funcţiei polinomiale*

$$f\in\mathcal{F}(I\!R^2),\quad f(x,y)=x^2y-5xy+x^2-5x+6y+6,$$

cu ajutorul formulei lui Taylor într-o vecinătate a punctului $\mathbf{x}_0=(2,-1)$.

Soluţie. Observăm că $f\in C^N(I\!R^2)$ pentru orice N număr natural, iar $f(\mathbf{x}_0)=0$. Pentru funcţia dată derivatele parţiale de ordinele întâi şi doi sunt date de relaţiile

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2xy-5y+2x-5,\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x^2-5x+6,\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=2y+2,\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=0,\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=2x-5,\end{cases}$$

de unde

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}_0)=\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}_0)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{x}_0)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{x}_0)=0,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\mathbf{x}_0)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(\mathbf{x}_0)=-1.$$

Mai departe,

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y)=0,\quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(x,y)=2,\quad \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(x,y)=0,\quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y)=0,$$

toate derivatele parţiale ale lui f de ordin patru sau mai mare fiind identic nule. Rezultă atunci că

$$\begin{aligned}f(x,y)\; &=\; f(\mathbf{x}_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}_0)(y-y_0)+\\ &+\; \frac{1}{2!}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{x}_0)(x-x_0)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\mathbf{x}_0)(x-x_0)(y-y_0)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{x}_0)(y-y_0)^2\Big)+\\ &+\; \frac{1}{3!}\Big(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(\mathbf{x}_0)(x-x_0)^3+3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(\mathbf{x}_0)(x-x_0)^2(y-y_0)+3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(\mathbf{x}_0)(x-x_0)(y-y_0)^2\\ &+\; \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(\mathbf{x}_0)(y-y_0)^3\Big).\end{aligned}$$

din care obţinem $f(x,y)=-(x-2)(y+1)+(x-2)^2(y+1)$, oricare ar fi $(x,y)\in I\!R^2$. ■

Exerciţiul 5.2.6. *Arătaţi că funcţia*

$$f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2_+), \quad f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\frac{y}{x}$$

este omogenă, precizaţi-i gradul de omogenitate şi verificaţi formula lui Euler.

Soluţie. Au loc relaţiile

$$f(tx,ty) = \big((tx)^2+(ty)^2\big)\sin\frac{ty}{tx} = t^2(x^2+y^2)\sin\frac{y}{x} = t^2 f(x,y), \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2_+,\ t>0,$$

deci f este omogenă de gradul al doilea. Prin calcul direct, se obţine că

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\Big((x^2+y^2)\sin\frac{y}{x}\Big) = 2x\sin\frac{y}{x} + (x^2+y^2)\cos\frac{y}{x}\Big(-\frac{y}{x^2}\Big)\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\Big((x^2+y^2)\sin\frac{y}{x}\Big) = 2y\sin\frac{y}{x} + (x^2+y^2)\cos\frac{y}{x}\Big(\frac{1}{x}\Big).
\end{aligned}$$

Conform acestor relaţii,

$$\begin{aligned}
x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= x\Big(2x\sin\frac{y}{x} + (x^2+y^2)\cos\frac{y}{x}\Big(-\frac{y}{x^2}\Big)\Big) + y\Big(2y\sin\frac{y}{x} + (x^2+y^2)\cos\frac{y}{x}\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big)\\
&= 2x^2\sin\frac{y}{x} - (x^2+y^2)\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x} + 2y^2\sin\frac{y}{x} + (x^2+y^2)\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\\
&= 2(x^2+y^2)\sin\frac{y}{x}\\
&= 2f(x,y),
\end{aligned}$$

ceea ce înseamnă că formula lui Euler este verificată. ■

5.2.2 Exerciţii propuse cu indicaţii şi răspunsuri

Exerciţiul 5.2.7. *Precizaţi direcţiile după care funcţia*

$$f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2), \quad f(x,y) = \sqrt[6]{x^2y^4}$$

are derivată în origine.

Indicaţie. O direcţie oarecare din $\mathbb{R}^2$ are versorul $\mathbf{s} = (\cos\theta, \sin\theta)$, unde $\theta\in[0,2\pi)$. Se arată că

$$\frac{df}{d\mathbf{s}}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[6]{t^6\cos^2\theta\sin^4\theta}}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{|t|}{t}\sqrt[6]{\cos^2\theta\sin^4\theta}.$$

■

Răspuns. Limita de mai sus există dacă şi numai dacă $\cos^2\theta\sin^4\theta = 0$, deci $\theta\in\Big\{0, \dfrac{\pi}{2}, \pi, \dfrac{3\pi}{2}\Big\}$. ■

Exerciţiul 5.2.8. *Pornind de la definiţia derivatelor parţiale, determinaţi* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,1)$ *dacă*

$$f : D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, \quad f(x,y) = \ln(1+xy^2).$$

Indicaţie. Notând $\mathbf{a} = (0,1)$, avem $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{a}) = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(\mathbf{a}+t\mathbf{e}_1) - f(\mathbf{a})}{t}$, unde $\mathbf{e}_1 = (1,0)$. ■

Răspuns. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{a}) = 1.$ ■

Exerciţiul 5.2.9. *Arătaţi că funcţia*

$$f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2), \quad f(x,y) = y\cos(x^2 - y^2)$$

satisface egalitatea

$$\frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y^2} f(x,y), \qquad \textit{pentru } x, y \neq 0.$$

Indicaţie. Au loc relaţiile

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2xy\sin(x^2 - y^2), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \cos(x^2 - y^2) + 2y^2\sin(x^2 - y^2).$$

■

Răspuns.

$$\frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial y} = -2y\sin(x^2 - y^2) + \frac{1}{y}\cos(x^2 - y^2) + 2y\sin(x^2 - y^2) = \frac{1}{y}\cos(x^2 - y^2) = \frac{1}{y^2}f(x,y).$$

■

Exerciţiul 5.2.10. *Demonstraţi că funcţia*

$$f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2), \quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

nu este diferenţiabilă în $(0,0)$.

Indicaţie. Să presupunem că f este diferenţiabilă în origine. Deoarece

$$f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0,$$

conform definiţiei diferenţiabilităţii urmează că

$$f(x,y) = \alpha(x,y)\sqrt{x^2+y^2}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

cu

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \alpha(x,y) = 0 = \alpha(0,0).$$

■

Răspuns. Din relaţiile de mai sus se obţine că expresia lui α este dată de

$$\alpha(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Însă $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \alpha(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x|y|}{x^2+y^2}$ nu există, lucru care se poate constata, de exemplu, observând că $\alpha(x,x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, pentru $x > 0$, iar $\alpha(x,x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, pentru $x < 0$, sau folosind caracterizarea cu şiruri a limitei unei funcţii într-un punct. Rezultă de aici că f nu este diferenţiabilă în $(0,0)$. ■

Exerciţiul 5.2.11. *Calculaţi $d^N f(x,y)$, unde $f(x,y) = e^{ax+by}$, $a, b \in I\!R$.*

Indicaţie. Se arată că $d^N(e^{ax+by}) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} C_N^k \frac{\partial^N(e^{ax+by})}{\partial x^{N-k}\partial y^k} dx^{N-k}dy^k$. ■

Răspuns. $d^N(e^{ax+by}) = e^{ax+by}\sum_{k=0}^{N} C_N^k a^{N-k}b^k dx^{N-k}dy^k = e^{ax+by}(adx+bdy)^n$. ■

5.2.3 Întrebări de autoevaluare

1°. Fie funcţia

$$f \in \mathcal{F}(I\!R^2), \quad f(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \text{ şi } y \neq 0 \\ 0, & x = 0 \text{ sau } y = 0 \end{cases}.$$

Atunci f este derivabilă parţial în origine, iar $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, deşi f nu este continuă în origine.

Cum explicaţi acest rezultat? ■

2°. Fie funcţia

$$f \in \mathcal{F}(I\!R^2), \quad f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\sqrt{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Atunci f este diferenţiabilă în origine, deşi $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ şi $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sunt discontinue în origine.

Cum explicaţi? ■

3°. Fie $E \subset I\!R^n$ un con cu vârful în origine şi $k \in I\!R$.

Este mulţimea funcţiilor omogene de gradul k pe $I\!R$ spaţiu liniar real în raport cu operaţiile uzuale de adunare a funcţiilor şi înmulţire a funcţiilor cu scalari? ■

4°. Daţi exemplu de două funcţii $f_1, f_2 \in \mathcal{F}(I\!R^n)$ care au aceeaşi matrice hessiană în orice $\mathbf{x} \in I\!R^n$ fără ca diferenţa lor să fie constantă. ■

5°. Precizaţi definiţia laplacianului în trei variabile.

5.3 Teoria diferenţiabilităţii şi derivabilităţii funcţiilor vectoriale de argument vectorial

5.3.1 Exerciţii rezolvate

Exerciţiul 5.3.1. *Fie funcţia*

$$\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I\!R^2, I\!R^3), \quad \mathbf{f}(x,y) = (xy, y\sin x, x+y).$$

Demonstraţi că $\mathbf{f}$ este diferenţiabilă pe $I\!R^2$. Precizaţi diferenţiala sa $d\mathbf{f}(\mathbf{x})$ într-un punct oarecare $\mathbf{x}$ şi $d\mathbf{f}(\mathbf{x_0};\mathbf{a})$, unde $\mathbf{x}_0 = (0,1)$, $\mathbf{a} = (1,0)$. Determinaţi matricea jacobiană a lui $\mathbf{f}$ într-un punct oarecare $\mathbf{x}$.

Soluţie. Fie funcţiile de coordonate $f_1,\ f_2,\ f_3 \in \mathcal{F}(I\!R^2, I\!R)$,

$$f_1(x,y) = xy, \quad f_2(x,y) = y\sin x, \quad f_3(x,y) = x + y.$$

Derivatele parţiale de ordinul întâi ale acestor funcţii

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = y,\ \frac{\partial f_1}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = y\cos x,\ \frac{\partial f_2}{\partial y} = \sin x, \quad \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y) = 1,\ \frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y) = 1$$

sunt continue pe $I\!R^2$, prin urmare $f_1,\ f_2$ şi f_3 sunt funcţii diferenţiabile pe $I\!R^2$.

Deoarece funcţiile de coordonate $f_1,\ f_2$ şi f_3 sunt diferenţiabile pe $I\!R^2$, funcţia vectorială $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ este diferenţiabilă pe $I\!R^2$.

Diferenţiala funcţiei $\mathbf{f}$ într-un punct oarecare $\mathbf{x} = (x,y)$ se calculează cu ajutorul diferenţialelor funcţiilor coordonate sub forma

$$d\mathbf{f}(x,y) = (df_1(x,y), df_2(x,y), df_3(x,y)) = (ydx + xdy, y\cos x dx + \sin x dy, dx + dy),$$

de unde

$$d\mathbf{f}(\mathbf{x_0};\mathbf{a}) = (1\cdot 1 + 0\cdot 0,\ 1\cos 0\cdot 1 + \sin 1\cdot 0,\ 1 + 0) = (1,1,1).$$

Deoarece matricea jacobiană a lui $\mathbf{f}$ într-un punct oarecare $\mathbf{x} = (x,y)$ este

$$J_{\mathbf{f}}(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial f_3}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial f_3}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix},$$

urmează că $J_{\mathbf{f}}(x,y) = \begin{pmatrix} y & x \\ y\cos x & \sin x \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. ■

Exerciţiul 5.3.2. *Fie funcţia*

$$\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I\!R^2, I\!R^2), \quad \mathbf{f}(x,y) = (\sin(x^2 + y^2), \cos(xy))$$

Demonstraţi că $\mathbf{f}$ *este de două ori diferenţiabilă pe* $I\!R^2$ *şi calculaţi* $d^2\mathbf{f}(\mathbf{x}_0;\mathbf{a})$*, unde* $\mathbf{x}_0 = (0, \sqrt{\pi})$, $\mathbf{a} = (0,1)$.

Soluţie. Fie funcţiile de coordonate $f_1,\ f_2 \in \mathcal{F}(I\!R^2, I\!R)$,

$$f_1(x,y) = \sin(x^2 + y^2), \quad f_2(x,y) = \cos(xy).$$

Derivatele parţiale de ordinul întâi ale acestor funcţii sunt, respectiv,

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = 2x\cos(x^2 + y^2),\ \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = 2y\cos(x^2 + y^2), \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = -y\sin(xy),\ \frac{\partial f_2}{\partial y} = -x\sin(xy),$$

în vreme ce derivatele parţiale de ordinul al doilea sunt, respectiv,

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}(x,y) = 2\cos(x^2 + y^2) - 4x^2\sin(x^2 + y^2), \quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}(x,y) = 2\cos(x^2 + y^2) - 4y^2\sin(x^2 + y^2)$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x\partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f_1}{\partial y\partial x}(x,y) = -4xy\sin(x^2 + y^2), \quad \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}(x,y) = -y^2\cos(xy),$$

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2}(x,y) = -x^2\cos(xy), \quad \frac{\partial^2 f_2}{\partial x\partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f_2}{\partial y\partial x}(x,y) = -(\sin(xy) + xy\cos(xy)).$$

Deoarece aceste derivate parţiale sunt continue pe $\mathbb{R}^2$, urmează că funcţiile de coordonate f_1 şi f_2 sunt de două ori diferenţiabile pe $\mathbb{R}^2$.

În concluzie $\mathbf{f}$ este de două ori diferenţiabilă pe $\mathbb{R}^2$.

Diferenţiala de ordinul al doilea a lui $\mathbf{f}$ într-un punct oarecare $\mathbf{x} = (x, y)$ se calculează cu ajutorul diferenţialelor de ordinul al doilea ale funcţiilor coordonate, sub forma

$$d^2\mathbf{f}(x, y) = (d^2 f_1(x, y), d^2 f_2(x, y)),$$

unde

$$\begin{aligned}
d^2 f_1(x, y) &= \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}(x, y)dx^2 + 2\frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y}(x, y)dxdy + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}(x, y)dy^2 \\
&= (2\cos(x^2 + y^2) - 4x^2 \sin(x^2 + y^2))dx^2 - 8xy \sin(x^2 + y^2)dxdy+ \\
&\quad +(2\cos(x^2 + y^2) - 4y^2 \sin(x^2 + y^2))dy^2 \\
d^2 f_2(x, y) &= \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}(x, y)dx^2 + 2\frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial y}(x, y)dxdy + \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2}(x, y)dy^2 \\
&= -y^2 \cos(xy)dx^2 - 2(\sin(xy) + xy \cos(xy))dxdy - x^2 \cos(xy)dy^2,
\end{aligned}$$

iar, pentru $x = \sqrt{\pi}$, $y = 0$, $dx = 0$, $dy = 1$, de unde obţinem $d^2\mathbf{f}(\mathbf{x}_0; \mathbf{a}) = (-2, 0)$, deci un vector din $\mathbb{R}^2$. ∎

Exerciţiul 5.3.3. *Să se determine aproximarea liniară a funcţiei*

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2), \quad \mathbf{f}(x, y) = (\sin^2 x \cos y, \sin x - \cos y), \quad (\forall)\ \mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

într–o vecinătate a punctului $\mathbf{x}_0 = \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Soluţie. Se observă că $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{f}\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) = (0, 0)$.

Aproximarea liniară a funcţiei $\mathbf{f}$ în vecinătatea punctului $\mathbf{x}_0$ este dată de relaţia

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cong \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0; \mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

Considerând funcţiile de coordonate $f_1,\ f_2 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$,

$$f_1(x, y) = \sin^2 x \cos y, \quad f_2(x, y) = \sin x - \cos y,$$

rezultă că

$$d\mathbf{f}(x, y) = (df_1(x, y), df_2(x, y)) = (2\sin x \cos x \cos y dx - \sin^2 x \sin y dy, \cos x dx + \sin y dy),$$

de unde $d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0; \mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \left(0 \cdot 1(x - 0) - 0 \cdot 1\left(y - \dfrac{\pi}{2}\right), 1(x - 0) + 1\left(y - \dfrac{\pi}{2}\right)\right) = \left(0, x + y - \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Aproximarea liniară căutată este $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cong \left(0, x + y - \dfrac{\pi}{2}\right)$. ∎

Exerciţiul 5.3.4. *Să se calculeze* $\dfrac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x \partial y}\left(\pi, \dfrac{\pi}{2}\right)$, *unde*

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad \mathbf{f}(x, y) = (\sin(x + y), \cos(x + y), xy).$$

Soluţie. Derivata parţială de ordinul al doilea mixtă a unei funcţii vectoriale de două variabile reale $\mathbf{f}$, într–un punct (x, y), se calculează după regula

$$\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y}\Big)(x,y).$$

Dar $\dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial y}(x,y) = (\cos(x+y),\, -\sin(x+y),\, x)$. Aplicând acestei funcţii operaţia de derivare faţă de x, găsim

$$\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x \partial y}(x,y) = (-\sin(x+y),\, -\cos(x+y),\, 1).$$

Luând $x = \pi$ şi $y = \dfrac{\pi}{2}$, obţinem

$$\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x \partial y}\Big(\pi, \frac{\pi}{2}\Big) = \Big(-\sin\frac{3\pi}{2}, -\cos\frac{3\pi}{2}, 1\Big) = (1, 0, 1).$$

Derivata astfel determinată este un vector de lungime $\sqrt{2}$, paralel cu planul xOz. ■

Exerciţiul 5.3.5. *Fie suprafaţa*

$$(\mathcal{S}): \quad \mathbf{r} = (u^2 + v + 3)\mathbf{i} + (u^2 - v + 1)\mathbf{j} + uv\mathbf{k}, \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

Determinaţi ecuaţia planului tangent la suprafaţă şi a normalei în punctul $M_0 \in (\mathcal{S})$ corespunzător perechii $(u_0, v_0) = (1, 0)$. Precizaţi coeficienţii lui Gauss şi prima formă fundamentală asociată suprafeţei $(\mathcal{S})$. Demonstraţi că liniile parametrice $u = c$, $c \in \mathbb{R}$ sunt drepte, iar curba $(C) : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u,u)$, $u \in \mathbb{R}$, este curbă plană.

Soluţie. Observăm că funcţia $\mathbf{S} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ care defineşte suprafaţa $(\mathcal{S})$ este diferenţiabilă, prin urmare $(\mathcal{S})$ este o suprafaţă netedă în $\mathbb{R}^3$. Să notăm

$$S_1(u,v) = u^2 + v + 3, \quad S_2(u,v) = u^2 - v + 1, \quad S_3(u,v) = uv$$

funcţiile coordonate ale funcţiei vectoriale $\mathbf{S}$. Atunci parametrii directori A, B, C ai normalei $\mathbf{N}$ la planul tangent la suprafaţă sunt

$$\begin{aligned} A &= \frac{D(S_2,S_3)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} 2u & -1 \\ v & u \end{vmatrix} = 2u^2 + v \\ B &= \frac{D(S_3,S_1)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} v & u \\ 2u & 1 \end{vmatrix} = v - 2u^2 \\ C &= \frac{D(S_1,S_2)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} 2u & 1 \\ 2u & -1 \end{vmatrix} = -4u \end{aligned},$$

iar matricea jacobiană a aplicaţiei $\mathbf{S}$ este

$$J_{\mathbf{S}}(u,v) = \begin{pmatrix} 2u & 1 \\ 2u & -1 \\ v & u \end{pmatrix}.$$

Pentru $u = 1$ şi $v = 0$, obţinem $A = 2$, $B = -2$, $C = -4$.

Deoarece $M_0(4, 2, 0)$, ecuaţia planului tangent în M_0 la $(\mathcal{S})$ este $(P) : 2(x-4)+(-2)(y-2)+(z-0)(-4) = 0$, adică $(P) : 2x + 2y - 4z - 4 = 0$.

Ecuaţiile canonice ale normalei în M_0 la $(\mathcal{S})$ sunt atunci

$$(D) : \frac{x-4}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-0}{-4}.$$

Din expresia matricei jacobiene de mai sus obţinem coeficienţii primei forme fundamentale

$$\begin{aligned} E(u,v) &= (2u)^2+(2u)^2+v^2 = 8u^2+v^2 \\ G(u,v) &= 1^2+(-1)^2+u^2 = u^2+2 \\ F(u,v) &= 2u\cdot 1+2u\cdot(-1)+v\cdot u = uv, \end{aligned}$$

iar prima formă fundamentală asociată suprafeţei $(\mathcal{S})$ este

$$ds^2 = (8u^2+v^2)du^2 + 2uvdudv + (u^2+2)dv^2.$$

Linia parametrică $u = c$ are reprezentarea $x = c^2+v+3$, $y = c^2-v+1$, $z = cv$, $v \in I\!\!R$, de unde $x-(c^2+3) = -(y-(c^2+1)) = \dfrac{z}{c} = v$. De aici,

$$\frac{x-(c^2+3)}{1} = \frac{y-(c^2+1)}{-1} = \frac{z}{c},$$

aceasta reprezentând ecuaţiile unei drepte care trece prin $M(c^2+3, c^2+1, 0)$ şi are ca vector director $\mathbf{v} = \mathbf{i}-\mathbf{j}+c\mathbf{k}$.

Curba (C) are reprezentarea parametrică $x = u^2+u+3$, $y = u^2-u+1$, $z = u^2$, $v \in I\!\!R$. Ecuaţia unui plan care conţine drumul (C) este $Ax+By+Cz+D = 0$, unde coeficienţii A, B, C, D urmează a fi determinaţi din condiţia ca planul să conţină curba (C). Se obţine

$$A(u^2+u+3)+B(u^2-u+1)+Cu^2+D = 0, \quad u \in I\!\!R,$$

de unde, prin identificarea coeficienţilor, obţinem relaţiile $A+B+C = 0$, $A-B = 0$ şi $3A+B+D = 0$. Atunci $B = A$, $C = -2A$, $D = -4A$, iar curba (C) se găseşte în planul $Ax+Ay-2Az-4A = 0$.

Simplificând prin A obţinem că ecuaţia planului care conţine curba (C) este $x+y-2z-4 = 0$. ■

5.3.2 Exerciţii propuse cu indicaţii şi răspunsuri

Exerciţiul 5.3.6.
Fie funcţia

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2) \in \mathcal{F}(I\!\!R^2, I\!\!R^2) \quad \mathbf{f}(x,y) = (e^x\cos y, e^x \sin y).$$

Demonstraţi că $\dfrac{D(f_1,f_2)}{D(x,y)}(x_0,y_0) \neq 0\ \forall (x_0,y_0) \in I\!\!R^2$.

Indicaţie.

$$\frac{D(f_1,f_2)}{D(x,y)}(x_0,y_0) = \begin{vmatrix} e^{x_0}\cos y_0 & -e^{x_0}\sin x_0 \\ e^{x_0}\sin y_0 & e^{x_0}\cos y_0 \end{vmatrix} = e^{x_0} \neq 0.$$

■

Exerciţiul 5.3.7. *Fie funcţia*

$$\mathbf{g} \in \mathcal{F}(I\!\!R^2, I\!\!R^2), \quad g(x_1,x_2) = ((x_1+x_2)\sin(x_1-x_2), e^{x_1+x_2}\cos(x_1-x_2)).$$

Determinaţi matricea jacobiană a funcţiei g într-un punct oarecare $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ şi determinantul său.

Indicaţie. Observăm că $\mathbf{g} = \mathbf{f} \circ \varphi$, unde

$$\mathbf{f} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2), \quad \mathbf{f}(u_1, u_2) = (f_1(u_1, u_2), f_2(u_1, u_2)) = (u_1 \sin u_2, e^{u_1} \cos u_2);$$

$$\varphi \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2), \quad \varphi(x_1, x_2) = (\varphi_1(x_1, x_2), \varphi_2(x_1, x_2)) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2).$$

Atunci

$$J_{\mathbf{g}}(\mathbf{x}) = J_{\mathbf{f} \circ \varphi}(\mathbf{x}) = J_{\mathbf{f}}(\varphi(\mathbf{x})) \cdot J_{\varphi}(\mathbf{x}).$$

■

Răspuns. Se obţine că

$$J_{\boldsymbol{f}}(\varphi(\mathbf{x})) = \begin{pmatrix} \sin(x_1 - x_2) & (x_1 + x_2)\cos(x_1 - x_2) \\ e^{x_1 + x_2}\cos(x_1 - x_2) & -e^{x_1 + x_2}\sin(x_1 - x_2) \end{pmatrix}, \quad J_{\varphi}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

de unde

$$J_{\mathbf{g}}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \sin(x_1 - x_2) + (x_1 + x_2)\cos(x_1 - x_2) & \sin(x_1 - x_2) - (x_1 + x_2)\cos(x_1 - x_2) \\ e^{x_1 + x_2}\cos(x_1 - x_2) - e^{x_1 + x_2}\sin(x_1 - x_2) & e^{x_1 + x_2}\cos(x_1 - x_2) + e^{x_1 + x_2}\cos(x_1 - x_2) \end{pmatrix}.$$

■

Exerciţiul 5.3.8. *Determinaţi elementul de suprafaţă $d\sigma$ pentru suprafeţele*
(1) $(\mathcal{S}_1) : \mathbf{r} = u\cos v\,\mathbf{i} + u\sin v\,\mathbf{j} + \frac{1}{u}\mathbf{k}$; (2) $(\mathcal{S}_2) : z = x^3 + y^3$.

Indicaţie. 1) Să notăm $S_1(u, v) = u\cos v$, $S_2(u, v) = u\sin v$, $S_3(u, v) = \frac{1}{u}$. Expresia elementului de suprafaţă $d\sigma$ este dată de

$$d\sigma = \sqrt{\frac{D(S_2, S_3)}{D(u, v)}^2 + \frac{D(S_3, S_1)}{D(u, v)}^2 + \frac{D(S_1, S_2)}{D(u, v)}^2}\, du dv.$$

2) Deoarece suprafaţa (S_2) este definită explicit cu z ca funcţie de x, y, prin $z = f(x, y) = x^3 + y^3$, expresia elementului de suprafaţă $d\sigma$ este dată de

$$d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dx dy.$$

■

Răspuns. 1) Se observă că

$$\frac{D(y, z)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin v & u\cos v \\ -\frac{1}{u^2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{u}\cos v;$$

$$\frac{D(z, x)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{u^2} & 0 \\ \cos v & -u\sin v \end{vmatrix} = \frac{1}{u}\sin v;$$

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos v & -u\sin v \\ \sin v & u\cos v \end{vmatrix} = u.$$

Se obţine că

$$d\sigma = \sqrt{\left(\frac{1}{u}\cos v\right)^2 + \left(\frac{1}{u}\sin v\right)^2 + u^2} = \sqrt{\frac{1}{u^2} + u^2}dudv.$$

2) Se observă că $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 3y^2$, de unde

$$d\sigma = \sqrt{1 + 9(x^4 + y^4)}dxdy.$$

■

Exerciţiul 5.3.9. *Să se verifice dacă ecuaţiile* $\mathbf{r} = \dfrac{1}{u^2+v^2}(u\mathbf{i}+v\mathbf{j}+\mathbf{k})$, $u, v \in I\!R$ *şi* $\mathbf{r} = u\cos v\mathbf{i} + u\sin v\mathbf{j} + u^2\mathbf{k}$, $u, v \in I\!R$ *reprezintă aceeaşi suprafaţă.*

Indicaţie. Pentru fiecare dintre cele două suprafeţe se determină ecuaţia carteziană implicită. ■

Răspuns. Ecuaţia carteziană implicită este $x^2 + y^2 - z = 0$, de unde se trage concluzia. ■

Exerciţiul 5.3.10. *Determinaţi locul geometric al punctelor de pe suprafaţa* $\mathbf{r} = (u+v)\mathbf{i} + uv\mathbf{j} + (u^2+4v^2)\mathbf{k}$ *pentru care planul tangent în acel punct la suprafaţă trece prin* $A(1,0,0)$.

Indicaţie. Ecuaţia planului tangent într-un punct M corespunzător valorilor u, v este

$$\frac{D(y,z)}{D(u,v)}(x - (u+v)) + \frac{D(z,x)}{D(u,v)}(y - uv) + \frac{D(x,y)}{D(u,v)}(z - (u^2+4v^2)) = 0.$$

■

Răspuns. Punând condiţia ca A să aparţină planului tangent obţinem $(u+2v)(u-2v)(u+v-2) = 0$, de unde rezultă ecuaţiile vectoriale ale curbelor soluţii sub forma

$$\mathbf{r} = 3v\mathbf{i} + 2v^2\mathbf{j} + 8v^2\mathbf{k}, \quad \mathbf{r} = -v\mathbf{i} - 2v^2\mathbf{j} + 8v^2\mathbf{k}, \quad \mathbf{r} = 2\mathbf{i} + v(2-v)\mathbf{j} + (5v^2 - 4v + 4)\mathbf{k}.$$

De exemplu, prima curbă este intersecţia dintre planul $4y - z = 0$ şi cilindrul parabolic cu generatoarele paralele cu axa Oz de ecuaţie $y = \dfrac{2}{9}x^2$. Afirmaţii asemănătoare se pot face şi pentru celelalte două curbe. Precizaţi–le. ■

5.3.3 Întrebări de autoevaluare

1°. Fie $\mathbf{f} = (f_1, f_2, ..., f_m) \in \mathcal{F}(D, I\!R^m)$.
Care este formula de calcul a diferenţialei de ordinul N, $d^N\mathbf{f}(\mathbf{a})$, $N \geq 1$ în punctul $\mathbf{a} \in D$? ■

2°. Dacă funcţia $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{F}(D, I\!R^m)$ este diferenţiabilă în $\mathbf{x}_0 \in D$ şi $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(\boldsymbol{\varphi}(D), I\!R^p)$ este diferenţiabilă în $\mathbf{u}_0 = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_0) \in \overset{\circ}{\boldsymbol{\varphi}(D)}$, precizaţi regula de calcul a diferenţialei funcţiei compuse $\mathbf{F} = \mathbf{f} \circ \boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{F}(D, I\!R^p)$ în $\mathbf{x}_0$ ■

3°. Ce reprezintă din punct de vedere geometric suprafaţa

$$\mathbf{r} = v\cos u\mathbf{i} + v\sin u\mathbf{j} + v^2\mathbf{k}, \quad (u,v) \in [0, 2\pi) \times [0, \infty)?$$

■

4°. Fiind dată aplicaţia $\mathbf{S} : [0, 2\pi) \times [0, \pi] \to I\!\!R^3$ definită prin

$$\mathbf{S}(u, v) = \mathbf{r}(u, v) = a \cos u \sin v \mathbf{i} + a \sin u \sin v \mathbf{j} + a \cos v \mathbf{k},$$

în care a este o constantă pozitivă, $\operatorname{Im} \mathbf{S}$ este sfera de rază a cu centrul în origine.
Ce reprezintă curbele de coordonate $u = c$ şi $v = c$ în acest caz? ■

5°. Elementul de arie $d\sigma$ al suprafeţei de ecuaţie vectorială $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ se calculează cu formula

$$d\sigma = \sqrt{E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v)}\, dudv, .$$

De ce expresia de sub radical este totdeauna pozitivă? ■

Capitolul 6

MC. 06 – Aplicaţii: extreme; funcţii definite implicit; extreme condiţionate

6.1 Exerciţii rezolvate

Exerciţiul 6.1.1. *Să se determine valorile extreme ale funcţiei*

$$z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad z(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$$

Soluţie. Derivatele parţiale până la ordinul doi inclusiv ale funcţiei sunt:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + 3y^2 - 15, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = 6xy - 12;$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,y) = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x,y) = 6y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x,y) = 6x.$$

Din anularea derivatelor parţiale de ordinul întâi, se obţine

$$\begin{cases} x^2 + y^2 &= 5, \\ xy &= 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 &= 9, \\ xy &= 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y &= \pm 3, \\ xy &= 2 \end{cases}$$

Rezolvarea ultimelor două sisteme conduce la patru puncte staţionare

$$M_1(1,2), \quad M_2(2,1), \quad M_3(-1,-2), \quad M_4(-2,-1).$$

Matricele hessiene corespunzătoare celor patru puncte staţionare sunt

$$H_z(M_1) = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}, \qquad H_z(M_2) = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix},$$
$$H_z(M_3) = \begin{pmatrix} -6 & -12 \\ -12 & -6 \end{pmatrix}, \qquad H_z(M_4) = \begin{pmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -12 \end{pmatrix}.$$

Vom folosi *metoda valorilor proprii* pentru a stabili natura formelor pătratice $d^2 z(M_1), \cdots, d^2 z(M_4)$ care se pot scrie în forma

$$d^2 z(M_1) = (dx \ dy) \cdot H_z(M_1) \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}, \cdots, d^2 z(M_4) = (dx \ dy) \cdot H_z(M_4) \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}.$$

Se ştie că valorile proprii ale unei matrice pătratice simetrică A (de ordin 2 şi cu elementele a_{11}, $a_{12} = a_{21}$, a_{22}) sunt rădăcinile ecuaţiei caracteristice $P(\lambda) = 0$, unde $P(\lambda)$ este polinomul caracteristic al matricei

$$P(\lambda) \;=\; \det(A - \lambda I_2) \;=\; \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} \;=\; \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + \det A,$$

I_2 fiind aici matricea unitate de ordinul al doilea.

O rădăcină a ecuaţiei caracteristice a unei matrice pătratice simetrică A se numeşte fie *valoare proprie* a acesteia, fie *valoare proprie* a formei pătratice $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ care în baza canonică din $\mathbb{R}^2$ are matricea A.

O formă pătratică $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, care în baza canonică din $\mathbb{R}^2$ are matricea A, are expresia analitică

$$f(x_1, x_2) = (x_1\ x_2) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2,$$

unde $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ este un element oarecare al spaţiului $\mathbb{R}^2$.

Cele patru polinoame caracteristice $P_1(\lambda), \cdots, P_4(\lambda)$ ale respectiv celor patru hessiene ale funcţiei z în punctele sale staţionare sunt

$$\begin{aligned} P_1(\lambda) &= (\lambda + 6)(\lambda - 18), & P_2(\lambda) &= (\lambda - 6)(\lambda - 18), \\ P_3(\lambda) &= (\lambda - 6)(\lambda + 18), & P_4(\lambda) &= (\lambda + 6)(\lambda + 18). \end{aligned}$$

Pentru a determina natura unei forme pătratice $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, a cărei matrice A în baza canonică din $\mathbb{R}^2$ are rădăcinile caracteristice λ_1 şi λ_2 vom ţine cont de:

- dacă $\lambda_1 > 0$ şi $\lambda_2 > 0$, forma pătratică f este pozitiv definită;
- dacă $\lambda_1 < 0$ şi $\lambda_2 < 0$, forma pătratică f este negativ definită;
- dacă $\lambda_1 > 0$, iar $\lambda_2 = 0$, forma pătratică f este pozitiv semidefinită;
- când $\lambda_1 < 0$ şi $\lambda_2 = 0$, forma pătratică f este negativ semidefinită;
- dacă $\lambda_1 > 0$, iar $\lambda_2 < 0$, forma pătratică f este nedefinită.

Natura punctului staţionar analizat depinde de natura diferenţialei a doua a funcţiei în acel punct, aceeaşi cu natura formei pătratice cu care se exprimă această diferenţială.

Aplicând funcţiei z cele de mai sus, stabilim:

- M_1 şi M_3 nu sunt puncte de extrem ale funcţiei z; ele sunt puncte de tip şa;
- M_2 este un punct de minim local strict al funcţiei şi $f_{\min} = f(M_2) = -28$;
- M_4 este un punct de maxim local strict al funcţiei şi $f_{\max} = f(M_4) = 28$.

■

Exerciţiul 6.1.2. *Să se arate că funcţia $z = z(x, y)$ definită implicit de ecuaţia $F(x, y, z) = 0$, unde*

$$F(x, y, z) = \Phi\Big(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}\Big),$$

iar $(u, v) \mapsto \Phi(u, v)$ este o funcţie reală de două variabile reale diferenţiabilă pe un domeniu $D \subset \mathbb{R}^2$, este soluţia ***ecuaţiei cu derivate parţiale***

$$x\,\frac{\partial z}{\partial x} + y\,\frac{\partial z}{\partial y} = z - xy.$$

Soluţie. Dacă introducem **variabilele intermediare** u şi v, unde

$$u = u(x,y,z) = x + \frac{z}{y}, \quad v = v(x,y,z) = y + \frac{z}{x},$$

atunci putem spune că funcţia F depinde de variabilele sale x, y şi z prin intermediul variabilelor u şi v.

Derivatele parţiale de ordinul întâi ale variabilelor intermediare, pe care convenim să le notăm prin:

$$u_{,1}(x,y,z);\ u_{,2}(x,y,z);\ u_{,3}(x,y,z); \quad v_{,1}(x,y,z);\ v_{,2}(x,y,z);\ v_{,3}(x,y,z),$$

sunt date de

$$\begin{cases} u_{,1}(x,y,z) = 1, & u_{,2}(x,y,z) = -\dfrac{z}{y^2}, & u_{,3}(x,y,z) = \dfrac{1}{y}, \\ v_{,1}(x,y,z) = -\dfrac{z}{x^2}, & v_{,2}(x,y,z) = 1, & v_{,3}(x,y,z) = \dfrac{1}{x}. \end{cases}$$

Dacă convenim în plus ca derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiei Φ să fie notate $\Phi_{,1}$ şi $\Phi_{,2}$, iar cele ale funcţiei F prin $F_{,1}$, $F_{,2}$ şi $F_{,3}$, atunci ultimele derivate se determină din relaţiile:

$$F_{,1}(x,y,z) = \Phi_{,1} - \frac{z}{x^2}\Phi_{,2}, \quad F_{,2}(x,y,z) = -\frac{z}{y^2}\Phi_{,1} + \Phi_{,2}, \quad F_{,3}(x,y,z) = \frac{1}{y}\Phi_{,1} + \frac{1}{x}\Phi_{,2}.$$

Derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiei definită implicit sunt atunci

$$\begin{cases} z_{,1} = -\dfrac{F_{,1}}{F_{,3}} = \dfrac{\dfrac{z}{x^2}\Phi_{,2} - \Phi_{,1}}{\dfrac{1}{y}\Phi_{,1} + \dfrac{1}{x}\Phi_{,2}} \\[2ex] z_{,2} = -\dfrac{F_{,2}}{F_{,3}} = \dfrac{\dfrac{z}{y^2}\Phi_{,1} - \Phi_{,2}}{\dfrac{1}{y}\Phi_{,1} + \dfrac{1}{x}\Phi_{,2}}. \end{cases}$$

Folosind aceste derivate parţiale şi efectuând combinaţia $xz_{,1} + yz_{,2}$ constatăm că se obţine $z - xy$, ceea ce trebuia să se arate. ■

Exerciţiul 6.1.3. *Dintr–un fier cornier de lungime* 20 *de unităţi şi o foaie de sticlă cu aria egală cu* 16 *unităţi, urmează să se construiască un acvariu.*

Cum trebuiesc croite materialele astfel încât capacitatea acvariului să fie maximă?

Soluţie. Acvariul are forma unui paralelipiped dreptunghic de dimensiuni x, y, z. Evident, $x \geq y \geq z > 0$. Atunci, capacitatea acvariului este egală cu xyz.

Laturile paralelipipedului provenind din fierul cornier, însumarea lungimilor acestora trebuie să dea lungimea materialului. Cum din cele 12 muchii ale paralelipipedului din fiecare dimensiune sunt câte 4, urmează că $x + y + z = 5$.

Oricare dintre cele 6 feţe ale paralelipipedului este un dreptunghi de arie xy, yz, sau zx. Cum sunt câte 2 dreptunghiuri congruente şi pentru că toate provin din aceeaşi foaie de sticlă, suma ariilor acestor feţe trebuie să fie 16.

Prin urmare,

$$xy + yz + zx = 8.$$

Astfel, problema se reduce la o problemă de extrem condiţionat în care funcţia scop, definită pe mulţimea deschisă $D = \{M(x,y,z) | \, x \geq y \geq z > 0\}$, este $f(x,y,z) = xyz$, iar legăturile sunt:

$$F_1(x,y,z) = x + y + z - 5 = 0, \quad F_2(x,y,z) = xy + yz + zx - 8 = 0.$$

Fie $\mathcal{L}(x, y, z; \lambda, \mu)$ funcţia lui Lagrange corespunzătoare

$$\mathcal{L}(x, y, z; \lambda, \mu) = f(x, y, z) + \lambda F_1(x, y, z) + \mu F_2(x, y, z).$$

Derivatele parţiale de ordinul întâi ale acestei funcţii sunt:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x, y, z; \lambda, \mu) & = & yz + \lambda + \mu(y + z), \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x, y, z; \lambda, \mu) & = & zx + \lambda + \mu(z + x), \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial z}(x, y, z; \lambda, \mu) & = & xy + \lambda + \mu(x + y), \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x, y, z; \lambda, \mu) & = & F_1(x, y, z), \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu}(x, y, z; \lambda, \mu) & = & F_2(x, y, z). \end{cases}$$

Sistemul în necunoscutele x, y, z, λ, μ, format prin anularea acestor derivate este

$$\begin{cases} yz + \lambda + \mu(y + z) & = & 0, \\ zx + \lambda + \mu(z + x) & = & 0, \\ xy + \lambda + \mu(x + y) & = & 0, \\ x + y + z - 5 & = & 0, \\ xy + yz + zx - 8 & = & 0. \end{cases} \tag{6.1}$$

Pentru a rezolva mai simplu acest sistem, observăm că primele trei ecuaţii ale sale pot fi privite ca un sistem liniar şi omogen în necunoscutele 1, λ şi μ. Fiindcă o soluţie a acestui sistem este nebanală (prima componentă este 1), urmează că rangul matricii sistemului trebuie să fie mai mic decât 3 şi deci

$$\begin{vmatrix} yz & 1 & y + z \\ zx & 1 & z + x \\ xy & 1 & x + y \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad (z - y)(3x^2 - 10x + 8) = 0.$$

Egalarea cu zero a fiecărui factor din ecuaţia rezultată, la care se adaugă ultimele două ecuaţii ale sistemului (6.1), conduce la două sisteme de trei ecuaţii cu necunoscutele x, y şi z

$$\begin{cases} z - y = 0, \\ x + y + z - 5 = 0, \\ xy + yz + zx - 8 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x^2 - 10x + 8 = 0, \\ x + y + z - 5 = 0, \\ xy + yz + zx - 8 = 0. \end{cases}$$

Soluţiile acestor sisteme sunt:

$$(1, 2, 2); \quad \Big(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\Big); \quad (2, 2, 1); \quad (2, 1, 2); \quad \Big(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3}\Big); \quad \Big(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}\Big),$$

dar numai două se încadrează în datele problemei şi anume:

$$\Big(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\Big); \quad (2, 2, 1).$$

Pentru a determina valorile parametrilor lui Lagrange λ şi μ corespunzătoare acestor soluţii, vom înlocui pe rând componentele acestora în primele trei ecuaţii ale sistemului (6.1) şi astfel găsim pentru perechea (λ, μ) respectiv valorile:

$$\Big(\frac{16}{9}, -\frac{4}{3}\Big); \quad (4, -2).$$

Prin urmare, funcţia lui Lagrange are două puncte staţionare:

$$\Big(\frac{7}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3};\frac{16}{9},-\frac{4}{3}\Big);\qquad (2,2,1;4,-2)$$

şi deci funcţia scop are două puncte staţionare condiţionate:

$$M_1\Big(\frac{7}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3}\Big);\quad M_2(2,2,1),$$

corespunzătoare respectiv celor două perechi de valori ale lui λ şi μ.

Diferenţierea legăturilor într–un punct arbitrar al mulţimii D, conduce la

$$dx+dy+dz=0,\quad (y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz=0,$$

care în cele două puncte staţionare condiţionate, devin

$$\begin{cases} dx+dy+dz &= 0,\\ 8dx+11(dy+dz) &= 0,\end{cases}\qquad \begin{cases} dx+dy+dz &= 0,\\ 3(dx+dy)+4dz &= 0.\end{cases}$$

Din primul sistem obţinem $dx=0$ şi $dz=-dy$, iar din al doilea $dy=-dx$ şi $dz=0$.

Diferenţiala de ordinul al doilea a funcţiei lui Lagrange, într–un punct arbitrar al mulţimii D, are expresia

$$d^2\mathcal{L}(x,y,z;\lambda,\mu)=2[(z+\mu)dxdy+(x+\mu)dydz+(y+\mu)dzdx]+$$
$$2(dx+dy+dz)d\lambda+2[(y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz]d\mu.$$

care, în cele două puncte staţionare ale funcţiei $\mathcal{L}$, devine:

$$d^2\mathcal{L}\Big(M_1;\frac{16}{9},-\frac{4}{3}\Big)=-2dy^2;\quad d^2\mathcal{L}(M_2;4,-2)=2dx^2.$$

Prima diferenţială este o formă pătratică negativ definită şi deci M_1 este punct de maxim condiţionat strict, iar cea de a doua este o formă pătratică pozitiv definită, fapt ce atrage că punctul M_2 este punct de minim condiţionat strict. Valorile extreme corespunzătoare ale funcţiei scop sunt: $f_{max}=f(M_1)=\dfrac{112}{27}$; $f_{\min}=f(M_2)=4$.

În concluzie, problema dată revine la dimensionarea fierului cornier în patru bucăţi a câte 5 unităţi lungime, fiecare din ele urmând a fi divizată în câte trei bucăţi cu lungimile:

$$\frac{7}{3};\quad \frac{4}{3};\quad \frac{4}{3}.$$

Cât priveşte foaia de sticlă, aceasta urmează a fi croită în două părţi cu arii egale, fiecare parte fiind divizată la rându–i în trei bucăţi având ariile:

$$\frac{28}{9};\quad \frac{28}{9};\quad \frac{16}{9}.$$

Aşadar, se comandă foaia de sticlă cu lungimea de 6 unităţi şi lăţimea de $\dfrac{8}{3}$ unităţi. Foaia astfel comandată se divizează în două părţi identice cu dimensiunile 6 şi $\dfrac{4}{3}$. Din fiecare parte se extrage un pătrat cu latura $\dfrac{4}{3}$, iar din cele două bucăţi rămase se croiesc câte două dreptunghiuri identice de dimensiuni $\dfrac{7}{3}$ şi $\dfrac{4}{3}$. ■

Exerciţiul 6.1.4. *Transformaţi ecuaţia*

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=(y-x)z$$

introducând noile variabile independente

$$u=x^2+y^2,\quad v=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$$

şi noua funcţie necunoscută $w=-x-y+\ln z$.

Soluţie. Diferenţiind legăturile dintre variabile, obţinem

$$\begin{cases} du &= 2xdx + 2ydy, \\ dv &= -\dfrac{1}{x^2}dx - \dfrac{1}{y^2}dy, \\ dw &= -dx - dy + \dfrac{1}{z}dz. \end{cases}$$

Pe de altă parte

$$dw = \frac{\partial w}{\partial u}du + \frac{\partial w}{\partial v}dv.$$

Egalând expresiile diferenţialei funcţiei w, avem

$$-dx - dy + \frac{1}{z}dz = (2xdx + 2ydy)\frac{\partial w}{\partial u} - \Big(\frac{1}{x^2}dx + \frac{1}{y^2}dy\Big)\frac{\partial w}{\partial v},$$

de unde rezultă

$$dz = z\Big(2x\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v} + 1\Big)dx + z\Big(2y\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{y^2}\frac{\partial w}{\partial v} + 1\Big)dy.$$

Pe de altă parte, $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy$. Folosind unicitatea expresiei diferenţialei funcţiei z, deducem

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} &= z\Big(2x\dfrac{\partial w}{\partial u} - \dfrac{1}{x^2}\dfrac{\partial w}{\partial v} + 1\Big), \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} &= z\Big(2y\dfrac{\partial w}{\partial u} - \dfrac{1}{y^2}\dfrac{\partial w}{\partial v} + 1\Big). \end{cases}$$

Cu acestea, ecuaţia iniţială ia forma mai simplă

$$\Big(\frac{zx}{y^2} - \frac{zy}{x^2}\Big)\frac{\partial w}{\partial v} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial w}{\partial v} = 0,$$

ce se poate integra, soluţia sa generală fiind $w = f(u)$, unde f este o funcţie diferenţiabilă arbitrară.

Ţinând cont de legătura dintre variabile, găsim că

$$z(x, y) = e^{x+y+f(x^2+y^2)}$$

este soluţia generală a ecuaţiei iniţiale. ■

Exerciţiul 6.1.5. *Să se determine valorile extreme ale funcţiei*

$$f : K \to I\!R, \quad f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2,$$

definită pe mulţimea compactă $K = \{\mathbf{x} = (x, y, z)|\ x^2 + y^2 + z^2 \le 100\} \subset I\!R^3$.

Soluţie. Faptul că funcţia f este definită pe o mulţime compactă (bila închisă în $I\!R^3$ de rază 10 cu centrul în origine) implică despărţirea problemei determinării valorilor sale extreme întâi în interiorul mulţimii K şi apoi pe frontiera acesteia.

Deoarece funcţia f este diferenţiabilă în interiorul mulţimi K, pentru a afla valorile sale extreme în punctele interioare ale lui K procedăm analog cu determinarea punctelor de extrem local ale unei funcţii reale de mai multe variabile reale definită pe o mulţime deschisă.

Sistemul format prin anularea derivatelor parţiale de ordinul întâi ale funcţiei f are doar soluţia $(0, 0, 0)$ şi deci singurul punct staţionar al funcţiei f este originea reperului.

Diferenţiala de ordinul al doilea a funcţiei f în origine este

$$d^2f(0, 0, 0) = 2dx^2 + 4dy^2 + 6dz^2$$

şi este evident că este o formă pătratică pe $\mathbb{R}^3$, pozitiv definită.

Prin urmare, în origine, funcţia f are un punct de minim iar valoarea minimă este zero.

Să determinăm valorile extreme ale funcţiei f pe frontiera domeniului acesteia care este sfera de ecuaţie

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 100 = 0.$$

Deci trebuie să rezolvăm o problemă de extrem condiţionat.

Pentru aceasta, introducem funcţia lui Lagrange

$$\mathcal{L}(x,y,z;\lambda) = f(x,y,z) + \lambda F(x,y,z)$$

căreia îi determinăm punctele critice ale căror coordonate sunt soluţii ale sistemului

$$\begin{cases} 2x(\lambda+1) = 0, \\ 2y(\lambda+2) = 0, \\ 2z(\lambda+3) = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 - 100 = 0, \end{cases}$$

format prin anularea derivatelor parţiale de ordinul întâi ale funcţiei $\mathcal{L}$.

Găsim trei puncte staţionare ale funcţiei $\mathcal{L}$

$$(10,0,0;-1), \quad (0,10,0;-2), \quad (0,0,10;-3)$$

din care deducem că funcţia f are punctele staţionare condiţionate

$$M_1(10,0,0), \quad M_2(0,10,0), \quad M_3(0,0,10)$$

corespunzătoare respectiv valorilor $-1,\ -2,\ -3$ ale multiplicatorului λ a lui Lagrange.

Diferenţiala de ordinul 2 a funcţiei lui Lagrange $\mathcal{L}$ într–un punct oarecare de pe sferă are expresia

$$d^2\mathcal{L}(x,y,z;\lambda) = 2(\lambda+1)dx^2 + 2(\lambda+2)dy^2 + 2(\lambda+3)dz^2 + 4(xdx + ydy + zdz)d\lambda,$$

expresie ce se modifică dacă ţinem cont că între diferenţialele variabilelor există legătura $xdx + ydy + zdz = 0.$ Astfel,

$$d^2\mathcal{L}(x,y,z;\lambda) = 2\Big((\lambda+1)dx^2 + (\lambda+2)dy^2 + (\lambda+3)dz^2\Big).$$

iar în punctele staţionare avem

$$d^2\mathcal{L}(M_1;-1) = 2(dy^2 + 2dz^2), \quad d^2\mathcal{L}(M_2;-2) = 2(dz^2 - dx^2),$$
$$d^2\mathcal{L}(M_3;-3) = -2(2dx^2 + dy^2).$$

Prima diferenţială este o formă pătratică pozitiv definită, a doua este formă pătratică nedefinită, în timp ce a treia diferenţială este formă pătratică negativ definită.

Rezultatele găsite arată că pentru funcţia f M_1 este punct de minim condiţionat strict, M_2 este un punct de tip şa, iar M_3 este punct de maxim condiţionat strict.

Prin urmare în punctele sferei de rază 10 cu centrul în origine, funcţia f are o valoare minimă egală cu $f(M_1) = 100$ şi o valoare maximă $f(M_3) = 300.$

Luând în calcul şi valorile pe care le ia funcţia f în interiorul domeniului de definiţie, rezultă că cea mai mică valoare a funcţiei este zero, atinsă în origine, iar cea mai mare valoare este $300,$ luată într–un punct de pe frontiera domeniului $K.$ ■

Exerciţiul 6.1.6. *Să se arate că funcţia* $f(x,y) = (1+e^y)\cos x - y\,e^y$, *definită pe mulţimea* $\mathbb{R}^2$, *are o infinitate de maxime şi nici un minim.*

Soluţie. Rezolvând sistemul $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$ obţinem punctele staţionare:

$$M_{2k}(2k\pi, 0); \quad M_{2k+1}((2k+1)\pi, -2), \quad k \in \mathbb{Z},$$

în care trebuie să calculăm diferenţiala a doua.

Diferenţiala a doua a funcţiei f într–un punct curent al domeniului de definiţie este diferenţiala primei diferenţiale. Se găseşte

$$d^2 f(x, y) = -(1 + e^y)\cos x dx^2 - 2e^y \sin x dx dy + e^y(\cos x - y - 2)dy^2.$$

Diferenţialele de ordinul doi în punctele staţionare M_{2k}

$$d^2 f(M_{2k}) = -2dx^2 - dy^2$$

sunt forme pătratice negativ definite. Prin urmare M_{2k} sunt puncte de maxim. Evident, sunt o infinitate de puncte de maxim.

Diferenţialele de ordinul doi în punctele staţionare M_{2k+1}

$$d^2 f(M_{2k+1}) = (1 + e^{-2})dx^2 - e^{-2}dy^2$$

sunt forme pătratice nedefinite. Deci M_{2k+1} sunt puncte şa. ■

6.2 Exerciţii propuse cu indicaţii şi răspunsuri

Exerciţiul 6.2.1. *Să se determine punctele de extrem ale funcţiilor:*

$$a) \quad f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y), \quad (x, y) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times \left(0, \frac{\pi}{2}\right);$$

$$b) \quad f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{1}{z^2}, \qquad x > 0,\ y > 0,\ z > 0.$$

Indicaţie. Se determină punctele staţionare. Se calculează diferenţiala a doua în punctele staţionare. Se studiază natura formelor pătratice găsite. ■

Răspuns. *a)* Un singur punct staţionar, $M\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right)$, care este punct de maxim. *b)* Un singur punct staţionar, $M\left(\dfrac{1}{2}, 1, 1\right)$, care este punct de minim. ■

Exerciţiul 6.2.2. *Să se arate că funcţia $z = z(x, y)$ definită implicit de ecuaţia $F(x, y, z) = 0$, unde*

$$F(x, y, z) = \Phi(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2),$$

iar $(u, v) \mapsto \Phi(u, v)$ este o funcţie reală de două variabile reale diferenţiabilă pe un domeniu $D \subset \mathbb{R}^2$, este soluţia ***ecuaţiei cu derivate parţiale***

$$(y - z)\frac{\partial z}{\partial x} + (z - x)\frac{\partial z}{\partial y} = x - y.$$

Indicaţie. **Variabilele intermediare** u şi v au expresiile

$$u = u(x, y, z) = x + y + z, \quad v = v(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Dacă convenim ca derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiei Φ să fie notate $\Phi_{,1}$ şi $\Phi_{,2}$, iar cele ale funcţiei F prin $F_{,1}$, $F_{,2}$ şi $F_{,3}$, atunci ultimele derivate se determină folosind regulile de derivare ale unei funcţii compuse, iar $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ şi $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ se calculează după formulele

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_{,1}}{F_{,3}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_{,2}}{F_{,3}}.$$

■

Răspuns. Derivatele parţiale $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{\Phi_{,1} + 2x\Phi_{,2}}{\Phi_{,1} + 2z\Phi_{,2}}$ şi $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{\Phi_{,1} + 2y\Phi_{,2}}{\Phi_{,1} + 2z\Phi_{,2}}$ verifică ecuaţia cu derivate parţiale din enunţ. ■

Exerciţiul 6.2.3. *Sistemul de ecuaţii algebrice* $\begin{cases} u + v = x + y \\ xu + yv = 1 \end{cases}$ *defineşte implicit funcţiile* $u = u(x, y)$ *şi* $v = v(x, y)$.

Să se determine diferenţialele acestor funcţii şi să se verifice rezultatul.

Indicaţie. Se diferenţiază sistemul. Se obţine $\begin{cases} du + dv = dx + dy \\ xdu + ydvv = -udx - vdy \end{cases}$ din care se pot calcula diferenţialele. Pe de altă parte, sistemul se poate rezolva în privinţa lui u şi v, astfel că verificarea rezultatului se poate face diferenţiind direct expresiile lui $u = u(x, y)$ şi $v = v(x, y)$. ■

Răspuns. $du = \dfrac{y + u}{y - x}dx + \dfrac{y + v}{y - x}dy$, $dv = \dfrac{x + u}{x - y}dx + \dfrac{x + v}{x - y}dy$. ■

Exerciţiul 6.2.4. *Să se determine extremele condiţionate ale funcţiei scop* $f(x, y, z) = x + y + z$ *cu legăturile* $F_1(x, y, z) = 0$ *şi* $F_2(x, y, z) = 0$, *unde* $F_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$, $F_2(x, y, z) = 2x + y + 2z - 1$. *Daţi o interpretare geometrică problemei rezolvate.*

Indicaţie. Se scrie funcţia lui Lagrange $\mathcal{L}(x, y, z; \lambda_1, \lambda_2) = f(x, y, z) + \lambda_1 F_1(x, y, z) + \lambda_2 F_2(x, y, z)$ căreia i se determină punctele staţionare. Rezultă două asemenea puncte. Se calculează diferenţiala a doua a funcţiei lui Lagrange în aceste puncte ţinându–se cont de legături. Se constată că nu este nevoie să mai diferenţiem legăturile pentru că $d^2\mathcal{L}(x, y, z; \lambda_1, \lambda_2) = 2\lambda_1(dx^2 + dy^2 + dz^2)$. ■

Răspuns. $M_1(0, 1, 0)$ pentru $\lambda_1 = -\dfrac{1}{4}$, $\lambda_2 = -\dfrac{1}{2}$ şi $M_2\Big(\dfrac{4}{9}, -\dfrac{7}{9}, \dfrac{4}{9}\Big)$ pentru $\lambda_1 = \dfrac{1}{4}$, $\lambda_2 = -\dfrac{11}{18}$. Rezultă M_1 punct de maxim şi M_2 punct de minim. În legătură cu interpretarea geometrică, se observă că funcţia scop este, până la factorul $\sqrt{3}$, distanţa de la punctul $M(x, y, z)$ al curbei de intersecţie dintre sfera $X^2 + Y^2 + Z^2 - 1 = 0$ şi planul $2X + Y + 2Z - 1 = 0$ (un cerc trasat pe sferă) la planul $X + Y + Z = 0$ care trece prin origine. ■

Exerciţiul 6.2.5. *Să se determine marginile funcţiei* $f(x, y) = x^2 + 2xy$ *în compactul*

$$K = \{(x, y) \in I\!R^2 \mid y \geq x^2 - 2, \ y \leq 2 - x^2\}.$$

Indicaţie. Sunt trei probleme de rezolvat:

1) extremele libere locale ale funcţiei f pe domeniul mărginit de parabolele care definesc compactul K;

2) extremele condiţionate ale funcţiei f cu legătura $x^2 - y - 2 = 0$;

3) extremele condiţionate ale funcţiei f cu legătura $x^2 + y - 2 = 0$.

Pentru prima problemă se găseşte că originea este **punct şa**.
Problemele 2) şi 3) se rezolvă cu metoda multiplicatorilor a lui Lagrange. ■

Răspuns. $M_1(-1,-1)$ punct de maxim, iar $M_2\Big(\dfrac{2}{3},-\dfrac{14}{9}\Big)$ punct de minim, ambele aflate pe prima parabolă care face parte din frontiera mulţimii compacte K. Pe cea de a doua parabolă, punctul $M_3(1,1)$ este de maxim, iar $M_4\Big(-\dfrac{2}{3},\dfrac{14}{9}\Big)$ este punct de minim al funcţiei f. ■

Exerciţiul 6.2.6. *Să se determine punctele de extrem ale funcţiei reale*

$$f(x,y,z) = x + y^2 + 3z^3 - \ln(x+y+z)$$

definită pe semispaţiul $x+y+z > 0$.

Indicaţie. Se determină **punctele critice** ale funcţiei f. În fiecare punct critic se calculează diferenţiala a doua a funcţiei f şi se studiază natura sa pentru a vedea dacă punctul staţionar respectiv este sau nu punct de extrem. ■

Răspuns. $M_1\Big(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}\Big)$, punct de minim. Punctul staţionar $M_2\Big(\dfrac{5}{6},\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{3}\Big)$ nu este punct de extrem: este punct şa. ■

6.3 Întrebări de autoevaluare

1°. Care este **condiţia necesară de extrem** într–un punct $\mathbf{x}_0 \in D \subset I\!R^n$ a unei **funcţii reale de mai multe variabile reale** f **diferenţiabilă** pe **domeniul** D? ■

2°. Cum se numeşte punctul $\mathbf{x}_0$ în care se anulează prima **diferenţială** a funcţiei f, dar care nu este punct de extrem? Dacă $df(\mathbf{x}_0) = 0$ şi f este **funcţie diferenţiabilă de două ori** în punctul $\mathbf{x}_0$, care este condiţia suficientă pentru ca f să aibă **punct de maxim** în $\mathbf{x}_0$? Dar **punct de minim**? ■

3°. Cum se formulează **teorema funcţiilor implicite** în cazul unei **funcţii reale** f **de** n **variabile reale definită implicit** de ecuaţia $F(x_1,x_2,...,x_n;y) = 0$? Daţi o demonstraţie pentru expresia **derivatelor parţiale de ordinul întâi** ale funcţiei f. ■

4°. Cum se determină **extremele locale** ale funcţiei $y = f(x_1,x_2,...,x_n)$ definită implicit de ecuaţia

$$F(x_1,x_2,...,x_n;y) = 0,$$

atunci când acest lucru este posibil? ■

5°. Ce este un **punct staţionar**? Dar un **punct staţionar condiţionat**? Cum se determină punctele staţionare condiţionate ale **funcţiei scop** $z = f(\mathbf{x},\mathbf{y})$ ale cărei variabile sunt supuse la **legăturile** $\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{0}$, unde $\mathbf{F} = (F_1,F_2,...,F_m)$, $\mathbf{x} = (x_1,x_2,...,x_n)$ şi $\mathbf{y} = (y_1,y_2,...,y_m)$? ■

Capitolul 7

MC. 07 – Integrale improprii

7.1 Exerciţii rezolvate

Exerciţiul 7.1.1. *Studiaţi natura integralei improprii de speţa întâi*

$$I_n = \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^n}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

şi în caz de convergenţă stabiliţi valoarea sa.

Soluţie. Pentru a se urmări studiul naturii integralei improprii reamintim un set de definiţii.

Precizăm că a şi b sunt elemente din $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ cu proprietăţile $-\infty < a < b \leq +\infty$, iar

$$f : [a, b) \to \mathbb{R}, \tag{7.1}$$

este o funcţie integrabilă Riemann pe orice interval compact $[a, t] \subset [a, b)$ şi nemărginită într–o vecinătate a lui b dacă $b \in \mathbb{R}$.

Definiţia 7.1.1. *Limita în punctul* $t = b$ *a funcţiei*

$$F : [a, b) \to \mathbb{R}, \quad F(t) = \int_a^t f(x)dx \tag{7.2}$$

se numeşte **integrală improprie cu limita superioară de integrare punct singular** *şi se notează cu simbolul*

$$\int_a^b f(x)dx. \tag{7.3}$$

Din această definiţie rezultă

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b} F(t) = \lim_{t\to b} \int_a^t f(x)dx. \tag{7.4}$$

Definiţia 7.1.2. *Funcţia* f *se numeşte* **integrabilă în sens generalizat** *dacă există şi este finită limita funcţiei* F *pentru* $t \to b$.

Definiţia 7.1.3. *Dacă funcţia (7.1) este integrabilă în sens generalizat, spunem că integrala improprie (7.3) este* **convergentă***; dacă limita pentru $t \to b$ a funcţiei (7.2) este infinită sau nu există, integrala improprie (7.3) se numeşte* **divergentă***.*

Definiţia 7.1.4. *Prin* **natura unei integrale improprii** *se înţelege proprietatea sa de a fi convergentă sau divergentă.*

În baza acestor definiţii rezultă că trebuie să studiem limita la infinit a funcţiei

$$F_n : [0, \infty) \to I\!R, \quad F_n(t) = \int_0^t \frac{dx}{(x^2+1)^n}, \quad n \in I\!N^*. \tag{7.5}$$

În prealabil, vom stabili o relaţie de recurenţă între termenii şirului de funcţii $(F_n)_{n \in I\!N^*}$. Mai întâi avem

$$F_n(t) = \int_0^t \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^n} dx = \int_0^t \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}} - \frac{1}{2}\int_0^t x \cdot \frac{2x}{(x^2+1)^n} dx,$$

care se poate scrie şi în forma

$$F_n(t) = F_{n-1}(t) - \frac{1}{2}\int_0^t x\Big((x^2+1)^{-n}(2x)\Big)dx. \tag{7.6}$$

Folosind metoda integrării prin părţi alegând $u(x) = x$, $v'(x) = (x^2+1)^{-n}(2x)$

$$\int_\alpha^\beta u(x) \cdot v'(x) dx = \Big(u(x) \cdot v(x)\Big)\Big|_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta u'(x) \cdot v(x) dx.$$

şi utilizând $u'(x) = 1$ şi $v(x) = \dfrac{(x^2+1)^{-n+1}}{-n+1} = -\dfrac{1}{(n-1)(x^2+1)^{n-1}}$, din (7.6) obţinem

$$F_n(t) = F_{n-1}(t) + \frac{x}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}}\Big|_0^t - \frac{1}{2(n-1)} F_{n-1}(t).$$

Deducem astfel relaţia de recurenţă anunţată

$$F_n(t) = \frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{t}{(t^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} \cdot F_{n-1}(t), \quad n \in I\!N^*, \quad n \geq 2. \tag{7.7}$$

Deoarece $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{1}{2(n-1)} \cdot \dfrac{t}{(t^2+1)^{n-1}} = 0$, din (7.7) putem afirma că *dacă integrala improprie*

$$I_{n-1} = \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}}$$

este convergentă, atunci

$$I_n = \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^n}$$

este convergentă.

Se impune aşadar să studiem natura integralei improprii $I_1 = \displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1}$, ceea ce înseamnă că trebuie calculată limita la infinit a funcţiei $F_1(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{dx}{1+x^2}$.

Cum $F_1(t) = \operatorname{arctg} x\Big|_0^t = \operatorname{arctg} t$ şi $\lim\limits_{t\to\infty} F_1(t) = \dfrac{\pi}{2}$, rezultă că integrala improprie I_1 este convergentă şi

$$I_1 = \frac{\pi}{2}. \tag{7.8}$$

Din afirmaţia precedentă rezultă că I_2 este convergentă, care antrenează I_3 convergentă şi, continuând astfel, ajungem la concluzia că I_n este integrală improprie convergentă. Deci,

$$\lim_{t\to\infty} F_n(t) = I_n, \quad \forall n \in I\!N^*. \tag{7.9}$$

Efectuând limită la infinit în relaţia de recurenţă (7.7) şi folosind (7.9), obţinem

$$I_n = \frac{2n-3}{2(n-1)} I_{n-1}, \quad n \in I\!N^*, \quad n \geq 2. \tag{7.10}$$

Aşadar,

$$I_n = \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1} = \frac{2n-3}{2n-2}\frac{2n-5}{2n-4} I_{n-2} = \ldots = \frac{(2n-3)\cdot(2n-5)\cdot(2n-7)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 1}{(2n-2)\cdot(2n-4)\cdot(2n-6)\cdot\ldots\cdot 4\cdot 2}\cdot I_1. \tag{7.11}$$

Din (7.8) şi (7.11) deducem

$$I_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-5)\cdot(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n-4)\cdot(2n-2)}\cdot\frac{\pi}{2}. \tag{7.12}$$

Relaţia (7.12) poate fi scrisă şi în forma

$$I_n = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{\pi}{2}. \tag{7.13}$$

‘

Observaţia 7.1.1. *Simbolul* !! *se citeşte* ***semifactorial***.

De exemplu:

$$(2n-1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n-3)\cdot(2n-1)$$

$$(2n)!! = 2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot\ldots\cdot(2n-2)\cdot(2n).$$

■

Exerciţiul 7.1.2. *Studiaţi natura integralei improprii de speţa întâi*

$$I = \int_2^\infty \frac{dx}{x^2+x-2}$$

şi în caz de convergenţă stabiliţi valoarea ei.

Soluţie. Conform exerciţiului precedent, trebuie calculată integrala $F(t) = \displaystyle\int_2^t \frac{dx}{x^2+x-2}$. Avem

$$F(t) = \int_2^t \frac{dx}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{3}\int_2^t \Big(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}\Big)dx = \frac{1}{3}\Big(\ln\Big|\frac{x-1}{x+2}\Big|\Big)\Big|_2^t = \frac{1}{3}\cdot\ln\frac{4(t-1)}{t+2}.$$

Să calculăm limita la infinit a funcţiei $F(t)$. Găsim

$$\lim_{t\to\infty} F(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{3}\cdot \ln\frac{4(t-1)}{t+2} = \frac{1}{3}\ln 4 = \frac{2}{3}\ln 2.$$

Aşadar, integrala I este convergentă şi valoarea sa este $I = \dfrac{2}{3}\ln 2$. ■

Exerciţiul 7.1.3. *Arătaţi că integrala improprie de speţa doua*

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$$

este convergentă şi determinaţi valoarea sa.

Soluţie. Funcţia de integrat $f(x) = \dfrac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}$ este definită pe intervalul $[0,1)$. În vecinătatea punctului $x=1$ funcţia f este nemărginită ceea ce arată că $x=1$, limita superioară a intervalului de integrare, este punct singular.

Convergenţa integralei improprii se stabileşte folosind criteriul în α

$$\lim_{x\to 1}(1-x)^{1/2}\cdot f(x) = \lim_{x\to 1}(1-x)^{1/2}\frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}} = \lim_{x\to 1}\sqrt{1-x}\frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{2-x} = 1.$$

Deoarece $\alpha = \dfrac{1}{2} < 1$ rezultă că I este convergentă.

Pentru determinarea valorii lui I utilizăm **metoda schimbării de variabilă**. Prin schimbarea $x = 1-t^2 = \varphi(t)$, noile limite de integrare sunt 1 şi 0, iar funcţia de integrat este $f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) = \dfrac{-2}{1+t^2}$. Astfel, integrala improprie I se transformă în integrala proprie

$$I = \int_1^0 \frac{-2}{1+t^2}dt = 2\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = 2\operatorname{arctg} t\Big|_0^1 = 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Prin urmare I este integrală improprie convergentă şi are valoarea $I = \dfrac{\pi}{2}$. ■

Exerciţiul 7.1.4. *Să se studieze integrala improprie*

$$I = \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}dx.$$

Soluţie. Funcţia de integrat $f(x) = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$ este mărginită pe intervalul nemărginit $[0,\infty)$, deci avem de a face cu o integrală improprie de primul tip.

Pentru studiul naturii integralei improprii I aplicăm **primul crieriu de comparaţie**. Majorând funcţia $\operatorname{arctg} x$ cu $\dfrac{\pi}{2}$ şi ţinând cont că pe intervalul $[0,\infty)$ are loc inegalitatea $(1+x^2)\sqrt{1+x^2} > x^3$, rezultă că

$$f(x) < \frac{\frac{\pi}{2}}{x^3}.$$

Constatăm apoi că integrala improprie de primul tip $\displaystyle\int_a^\infty \frac{\frac{\pi}{2}}{x^3}dx$, $a>0$ este convergentă.

Conform criteriului menţionat, integrala improprie I este convergentă.

Dacă luăm:

$$u = \operatorname{arctg} x; \quad dv = \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}},$$

se găseşte

$$du = \frac{dx}{1+x^2}; \quad v = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

unde v este o primitivă a funcţiei $\dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$. Această primitivă s–a determinat utilizând schimbarea de variabilă $x = \operatorname{tg} t$, ajungându–se la o primitivă funcţiei $\cos t$, care este $\sin t$. Cum $\sin t = \dfrac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$ şi $\operatorname{tg} t = x$, suntem conduşi la $v = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Astfel că

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}dx = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\operatorname{arctg} x\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}dx.$$

Calculul ultimei integrale se face folosind schimbarea de variabilă $x = \operatorname{tg} t$. Intervalul de integrare trece în compactul $[0, \dfrac{\pi}{2}]$, iar funcţia de integrat devine $\sin t$

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}dx = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\operatorname{arctg} x\Big|_0^\infty - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt$$

sau

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}dx = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\operatorname{arctg} x\Big|_0^\infty + \cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Prin urmare, valoarea integralei I este $I = \dfrac{\pi}{2} - 1$. ■

Exerciţiul 7.1.5. *Să se studieze natura integralei improprii de tipul al doilea*

$$I = \int_0^2 \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{4-x^2}}$$

şi în caz de convergenţă să i se determine valoarea.

Soluţie. Singularitatea funcţiei de integrat $f(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt{4-x^2}}$ se află în limita superioară de integrare. Având în vedere că $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{2-x}f(x) = \dfrac{1}{10}$, conform criteriului de comparaţie în α, deducem că integrala improprie I este convergentă deoarece $\alpha = \dfrac{1}{2} < 1$.

Pentru calculul integralei se foloseşte schimbarea de variabilă $x = 2\sin t = \varphi(t)$. Prin această schimbare de variabilă, intervalul de integrare trece în compactul $[0, \dfrac{\pi}{2}]$, iar funcţia de integrat devine

$$f(\varphi(t))\varphi'(t) = \frac{1}{1+4\sin^2 t}.$$

Se obţine astfel că I este integrala proprie

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+4\sin^2 t}.$$

Ultima integrală fiind de forma $\displaystyle\int_a^b \mathcal{R}(\sin t, \cos t)dt$, unde $\mathcal{R}(\sin t, \cos t)$ este o funcţie pară în $\sin t$ şi $\cos t$, se face substituţia $\operatorname{tg} t = u$ şi astfel integrala I devine o integrală improprie de primul tip, convergentă, a cărei

valoare este

$$I = \int_0^\infty \frac{du}{1+5u^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} u\sqrt{5}\Big|_0^\infty = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi\sqrt{5}}{10}.$$

Aşadar, $I = \dfrac{\pi\sqrt{5}}{10}$. ■

7.2 Exerciţii propuse cu indicaţii şi răspunsuri

Exerciţiul 7.2.1. *Studiaţi convergenţa integralei improprii*

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4}$$

şi în caz afirmativ calculaţi valoarea sa.

Indicaţie. Funcţia de integrat $f(x) = \dfrac{1}{1+x^4}$ este mărginită pe intervalul nemărginit $[0, \infty)$, deci avem o integrală improprie de primul tip.

Pentru studiul convergenţei lui I aplicăm **criteriul în** α . Cum $\alpha = 4 > 1$, I este convergentă.

Pentru calculul valorii lui I scriem

$$f(x) = \frac{1}{(x^2 - x\sqrt{2}+1)((x^2+x\sqrt{2}+1))}$$

şi descompunem în fracţii simple. ■

Răspuns. $I = \dfrac{\pi\sqrt{2}}{4}$. ■

Exerciţiul 7.2.2. *Studiaţi convergenţa integralei improprii*

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)\sqrt{4x^2+x+1}}$$

şi în caz afirmativ calculaţi valoarea sa.

Indicaţie. Funcţia de integrat $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)\sqrt{4x^2+x+1}}$ este mărginită pe intervalul nemărginit $[0, \infty)$, deci avem o integrală improprie de primul tip.

Pentru studiul convergenţei lui I aplicăm criteriul în α. Se găseşte $\alpha = \dfrac{3}{2} > 1$, deci I este convergentă.

Pentru calculul valorii lui I efectuăm schimbarea de variabilă (substituţia lui Euler)

$$\sqrt{4x^2+x+1} = t - 2x \Longrightarrow x = \frac{t^2-1}{4t+1} = \varphi(t).$$

Noul interval de integrare este $[0, \infty)$, iar funcţia de integrat devine $f(\varphi(t))\varphi'(t) = \dfrac{2}{t^2+4t}$. ■

Răspuns. $\dfrac{1}{2}\ln 5$. ■

Exerciţiul 7.2.3. *Studiaţi natura integralei improprii*

$$I = \int_0^\infty \frac{x \ln x}{(1-x^2)^2} dx.$$

Indicaţie. Deoarece pentru $x = 1,$ numitorul fracţiei de sub integrală se anulează, trebuie studiată natura următoarelor integrale improprii (generalizate):

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x \ln x}{(1-x^2)^2} dx; \quad I_2 = \int_1^2 \frac{x \ln x}{(1-x^2)^2} dx; \quad I_3 = \int_2^\infty \frac{x \ln x}{(1-x^2)^2} dx.$$

Se arată că integrala I_1 este divergentă arătând că integrala $J(u,v) = \displaystyle\int_u^v \frac{x \ln x}{(1-x^2)^2} dx,$ unde $0 < u < v < 1,$ nu are limită finită când $u \to 0$ şi $v \to 1.$ Pentru aceasta se face integrarea prin părţi în integrala $J(u,v),$ observând că $\dfrac{x}{(1-x^2)^2} = \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{1}{1-x^2}\Big)'.$ Se ajunge la integrala $\displaystyle\int_u^v \frac{1}{x(x^2-1)} dx$ care se calculează descompunând fracţia $\dfrac{1}{x(x^2-1)}$ în fracţii simple. ■

Răspuns. Divergentă. ■

Exerciţiul 7.2.4. *Să se studieze natura integralei improprii de tipul al doilea*

$$I = \int_{-1}^1 \frac{x-1}{x\sqrt[3]{x^2}} dx.$$

Indicaţie. Punctul singular al funcţiei de integrat $f(x) = \dfrac{x-1}{x\sqrt[3]{x^2}}$ se află în origine. Se aplică criteriul în $\alpha.$ ■

Răspuns. Integrala I este divergentă. ■

Exerciţiul 7.2.5. *Să se arate că integrala improprie de speţa a doua*

$$I = \int_a^b x\sqrt{\frac{x-a}{b-x}} dx, \ a < b,$$

este convergentă şi apoi să se determine valoarea sa.

Indicaţie. Integrala este convergentă în baza criteriului de comparaţie în $\alpha,$ unde $\alpha = \dfrac{1}{2} < 1.$

Cu substituţia $x = a\,\cos^2 t + b\,\sin^2 t$ integrala I devine integrala proprie

$$I = 2(b-a)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t(a\cos^2 t + b\sin^2 t) dt.$$

■

Răspuns. $I = \dfrac{\pi}{8}(b-a)(a+3b).$ ■

7.3 Întrebări de autoevaluare

1°. În ipoteza că $f : [a, b) \to I\!R,$ unde $-\infty < a < b < \infty,$ este o funcţie nemărginită în vecinătatea lui b şi integrabilă Riemann pe orice compact $[a, t] \subset [a, b),$ se poate introduce simbolul

$$\int_a^b f(x)dx, \tag{7.14}$$

denumit **integrală improprie de tipul al doilea** cu punctul singular în limita superioară de integrare.

Puteţi enunţa **criteriul lui Cauchy** de convergenţă a integralei improprii (7.14)? Dar demonstraţia, o puteţi prezenta?

Se cere justificare pentru fiecare răspuns da. ■

2°. Enunţaţi şi demonstraţi **criteriul lui Abel** de convergenţă a integralei improprii

$$\int_a^b f(x)h(x)dx, \tag{7.15}$$

cu integrantul de semn variabil şi singularitatea în limita superioară de integrare. ■

3°. Enunţaţi şi demonstraţi **criteriul lui Dirichlet** de convergenţă a integralei improprii (7.15) cu integrantul de semn variabil şi singularitatea în limita superioară de integrare. ■

4°. Prin ce se deosebesc criteriile de convergenţă ale lui Abel şi Dirichlet pentru integrale improprii (7.15)? ■

5°. Cum se numeşte integrala improprie $\displaystyle\int_a^b f(x)dx, \quad -\infty < a < c < b < \infty,$ unde $f : [a, c) \cup (c, b] \to I\!R$ este funcţie nemărginită într–o vecinătate a punctului $x = c$ şi integrabilă Riemann pe orice compact de forma $[a, u] \cup [v, b],$ cu $a < u < c < v < b,$ care este divergentă, dar pentru care există şi este finită limita

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \Big(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx \Big)? \tag{7.16}$$

Ce nume poartă limita din (7.16)? ■

Capitolul 8

MC. 08 – Integrale depinzând de un parametru

8.1 Exerciţii rezolvate

Exerciţiul 8.1.1. *Utilizând posibilitatea derivării sub semnul integrală să se calculeze*

$$J(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} \ln \frac{1 + y \sin x}{1 - y \sin x} dx.$$

Soluţie. Funcţia $J(y)$ este definită printr–o integrală proprie deoarece funcţia de sub semnul integrală are limită în origine şi deci poate fi prelungită prin continuitate în $x = 0$.

Fiindcă sunt îndeplinite ipotezele teoremei de derivare a integralelor depinzând de un parametru, putem scrie

$$J'(y) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 - y^2 \sin^2 x}.$$

Cu substituţia $\operatorname{tg} x = t$ obţinem $J'(y) = \dfrac{2}{\sqrt{1 - y^2}}$, de unde deducem $J(y) = 2 \arcsin y + C$. Constanta reală C se determină din $J(0) = 0$ şi se găseşte $C = 0$.

Prin urmare $J(y) = 2 \arcsin y$. ■

Exerciţiul 8.1.2. *Ştiind că **integrala lui Poisson** $\int_0^{\infty} e^{-z^2} dz$ este convergentă şi are valoarea $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, adică*

$$\int_0^{\infty} e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \tag{8.1}$$

să se arate că

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-z^2 x} dz, \quad x > 0. \tag{8.2}$$

Folosind acest rezultat să se arate că au loc următoarele egalităţi:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}; \tag{8.3}$$

$$\int_0^{\infty} \cos x^2 dx = \int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}; \tag{8.4}$$

Soluţie. Dacă în integrala din (8.1) facem schimbarea de variabilă $z = t\sqrt{x}$, unde $x > 0$ se consideră fixat, dar arbitrar, se obţine (8.2).

Pentru determinarea valorii primei integrale din (8.3) folosim (8.2) şi integrabilitatea integralelor improprii depinzând de un parametru. Astfel, avem

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx = \int_0^{\infty} \cos x \Big(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-z^2 x} dz \Big) dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \Big(\int_0^{\infty} e^{-z^2 x} \cos x \, dx \Big) dz. \tag{8.5}$$

Folosind de două ori integrarea prin părţi, obţinem

$$\int_0^{\infty} e^{-z^2 x} \cos x \, dx = \frac{z^2}{1+z^4}. \tag{8.6}$$

Din (8.5) şi (8.6) rezultă

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{z^2}{1+z^4} dz. \tag{8.7}$$

Considerăm integralele improprii $A = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{z^2}{1+z^4} dz$ din (8.7) şi $B = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{1+z^4} dz$. Combinaţiile $A + B$ şi $A - B$ conduc la

$$\begin{cases} A+B = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\Big(z - \frac{1}{z}\Big)'}{\Big(z - \frac{1}{z}\Big)^2 + 2} dz = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{z^2-1}{z\sqrt{2}} \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \\ A-B = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\Big(z + \frac{1}{z}\Big)'}{\Big(z + \frac{1}{z}\Big)^2 - 2} dz = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{z^2 - z\sqrt{2}+1}{z^2+z\sqrt{2}+1} \Big|_0^{\infty} = 0, \end{cases}$$

din care deducem

$$A = B = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}. \tag{8.8}$$

Din (8.7) şi (8.8) rezultă că $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Pentru cealaltă integrală cerută în (8.3), calculele sunt similare.

Dacă în integrala improprie $\displaystyle\int_0^{\infty} \cos x^2 dx$ efectuăm schimbarea de variabilă $x^2 = t$ şi folosim (8.3), se obţine

$$\int_0^{\infty} \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Analog se determină valoarea celeilalte integrale din (8.4).

Integralele din (8.4) sunt cunoscute ca **integralele lui Fresnel**, utilizate în optică. ■

Exerciţiul 8.1.3. *Să se arate că funcţia J definită prin integrala*

$$J(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin\theta) d\theta$$

verifică egalitatea

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} J(x) dx = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}, \quad a > 0.$$

Soluţie. Utilizând integrabilitatea integralelor improprii uniform convergente, putem scrie

$$\int_0^\infty e^{-ax}J(x)dx = \int_0^\infty e^{-ax}\Big(\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x\sin\theta)d\theta\Big)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(\int_0^\infty e^{-ax}\cos(x\sin\theta)dx\Big)d\theta. \tag{8.9}$$

Integrarea prin părţi de două ori în $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\cos(x\sin\theta)dx$ conduce la concluzia

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos(x\sin\theta)dx = \frac{a}{a^2+\sin^2\theta}. \tag{8.10}$$

Astfel, se obţine

$$\int_0^\infty e^{-ax}J(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a}{a^2+\sin^2\theta}d\theta. \tag{8.11}$$

Dacă în (8.11) efectuăm schimbarea de variabilă $\operatorname{tg}\theta = t$ se obţine rezultatul dorit. ■

Exerciţiul 8.1.4. *Calculând mai întâi funcţia $J(y)$ definită prin integrala depinzând de parametrul $y > 0$*

$$J(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{y+\cos^2 x},$$

să se determine funcţia $F(y) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{(y+\cos^2 x)^2}$.

Soluţie. Integrala se calculează efectuând schimbarea de variabilă $\operatorname{tg}x = t$. Noile limite de integrare sunt 0 şi ∞, iar funcţia de integrat devine $\dfrac{1}{yt^2+1+y}$. Astfel,

$$J(y) = \int_0^\infty\frac{dt}{yt^2+1+y} = \frac{1}{y}\int_0^\infty\frac{dt}{t^2+\Big(\sqrt{\frac{1+y}{y}}\Big)^2} = \frac{1}{y}\sqrt{\frac{y}{1+y}}\operatorname{arctg}\Big(t\sqrt{\frac{y}{1+y}}\Big)\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{y(y+1)}}.$$

Observând că $F(y) = -J'(y)$ şi folosind pentru $J(y)$ expresia $J(y) = \dfrac{\pi}{2}(y^2+y)^{-\frac{1}{2}}$, deducem

$$F(y) = \frac{\pi(2y+1)}{4y(y+1)\sqrt{y(y+1)}}.$$

■

Exerciţiul 8.1.5. *Să se arate că pentru funcţia*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3}{x^2}e^{-\frac{y^2}{x}}, & \textit{dacă} \quad x\in(0,1] \quad \textit{şi} \quad y\in I\!R \\ 0, & \textit{dacă} \quad x = 0 \quad \textit{şi} \quad y\in I\!R \end{cases}$$

*nu are loc **formula lui Leibniz de derivare a unei integrale depinzând de un parametru**, adică*

$$\frac{d}{dy}\int_0^1 f(x,y)dx \neq \int_0^1\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx. \tag{8.12}$$

Soluţie. Considerând că punctul $(x, y) \in (0, 1] \times I\!R$ se află pe parabola $y^2 = x$ şi efectuând limita în origine a restricţiei funcţiei f la parabolă, găsim că aceasta nu există. Prin urmare

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) \neq f(0, 0) = 0,$$

ceea ce arată că funcţia f nu este continuă.

În schimb, funcţia $f(x, \cdot) : I\!R \to I\!R$, cu valorile date în enunţ, este continuă oricare ar fi $x \in [0, 1]$.

Cu schimbarea de variabilă de integrare

$$-\frac{y^2}{x} = t, \tag{8.13}$$

obţinem că funcţia

$$J(y) = \int_0^1 \frac{y^3}{x^2} e^{-\frac{y^2}{x}}\, dx. \tag{8.14}$$

este bine definită şi

$$J(y) = ye^{-y^2}, \tag{8.15}$$

de unde deducem

$$\frac{d}{dy} J(y) = \frac{d}{dy} \int_0^1 f(x, y)dx = (1 - 2y^2)e^{-y^2} = J'(y). \tag{8.16}$$

Funcţia f este derivabilă parţial în raport cu y şi

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{x^2} e^{-\frac{y^2}{x}} \Big(3 - \dfrac{2y^2}{x}\Big), & y \neq 0 \\ 0, \quad y = 0 \end{cases} \tag{8.17}$$

şi atunci pentru $y \neq 0$

$$\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dx = \int_0^1 \frac{y^2}{x^2} e^{-\frac{y^2}{x}} \Big(3 - \frac{2y^2}{x}\Big)dx. \tag{8.18}$$

Utilizând schimbarea de variabilă (8.13), din (8.18) obţinem

$$\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dx = \int_{-\infty}^{-y^2} (3 + 2t)e^t dt = (1 - 2y^2)e^{-y^2}. \tag{8.19}$$

Pentru $y = 0$ vom avea $\displaystyle\int_0^1 0 \cdot dx = 0$, prin urmare

$$\Big(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dx\Big)\Big|_{y=0} = 0. \tag{8.20}$$

Pe de altă parte, din (8.15) deducem

$$J'(0) = 1. \tag{8.21}$$

Analizând raţionamentul constatăm că are loc (8.12). ■

Exerciţiul 8.1.6. *Să se exprime printr–o* ***integrală Euler****, următoarele integrale*

$$I_1 = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^n}, \quad I_2 = \int_b^a (a - x)^{p-1}(x - b)^{q-1}dx.$$

Soluţie. În integrala I_1 facem schimbarea de variabilă $\dfrac{1}{1+x^2}=t$. Obţinem

$$I_1=\frac{1}{2}\int_0^1 t^{n-\frac{3}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{2}B\Big(n-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\Big)=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(n)}{\Gamma\Big(n-\frac{1}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big)}.$$

În integrala I_2 se face schimbarea de variabilă $t=\dfrac{x-b}{a-b}$ şi se obţine

$$I_2=(a-b)^{p+q-1}B(p,q).$$

Dacă se ţine cont că $B(p,q)=B(q,p)$, se poate da şi altă expresie lui I_2. Aici Γ şi B sunt **funcţiile lui Euler**. ■

8.2 Exerciţii propuse cu indicaţii şi răspunsuri

Exerciţiul 8.2.1. *Utilizând posibilitatea derivării sub semnul integrală, să se calculeze integralele:*

$$J_1(y)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(y^2-\sin^2 x)\,dx,\quad y>1;\quad J_2(y)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{arctg}(y\sin x)}{\sin x}\,dx.$$

Indicaţie. În fiecare dintre integralele obţinute prin derivare

$$J_1'(y)=2y\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{y^2-\sin^2 x};\quad J_2'(y)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+y^2\sin^2 x}$$

se face schimbarea de variabilă $\operatorname{tg} x=t$. ■

Răspuns. $J_1(y)=\pi\ln\dfrac{|y+\sqrt{y^2-1}|}{2}$, $J_2(y)=\ln y+\sqrt{1+y^2}$. ■

Exerciţiul 8.2.2. *Ştiind că pentru $a\cdot b>0$ avem*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}=\frac{\pi}{2ab},\tag{8.22}$$

să se calculeze integrala

$$J(a,b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{(a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x)^2}.$$

Indicaţie. Se derivează parţial în egalitatea (8.22) folosind formula lui Leibniz de derivare a unei integrale depinzând de mai mulţi parametri. ■

Răspuns. $J(a,b)=\dfrac{\pi}{4ab}\Big(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\Big)$. ■

Exerciţiul 8.2.3. *Ce se poate spune despre* ***funcţia Bessel de indice întreg***

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\varphi - x\sin\varphi)d\varphi, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{8.23}$$

în legătură cu ***ecuaţia diferenţială Bessel de ordin întreg***

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0? \tag{8.24}$$

Indicaţie. Se derivează de două ori în (8.23) folosind formula lui Leibniz de derivare a unei integrale depinzând de un parametru, obţinând astfel $J_n'(x)$ şi $J_n''(x)$. Se arată că

$$x^2J_n''(x) + xJ_n'(x) + (x^2 - n^2)J_n(x) = 0. \tag{8.25}$$

■

Răspuns. Relaţia (8.25) arată că funcţia Bessel de indice întreg (8.23) este o **soluţie a ecuaţiei diferenţiale** Bessel de ordin întreg (8.24). ■

Exerciţiul 8.2.4. *Să se studieze convergenţa integralelor improprii:*

$$I_1 = \int_0^{\infty} x^{2n}e^{-x^2}dx; \quad I_2 = \int_0^1 \frac{dx}{(1 - x^m)^{\frac{1}{n}}}.$$

Indicaţie. În I_1 se face substituţia $x^2 = t$, iar în I_2 se schimbă variabila de integrare prin $x^m = t$. ■

Răspuns. $I_1 = \Gamma\Big(n + \dfrac{1}{2}\Big)$, $I_2 = \dfrac{1}{m}B\Big(\dfrac{1}{m}, 1 - \dfrac{1}{n}\Big)$, unde B şi Γ sunt funcţiile lui Euler. ■

Exerciţiul 8.2.5. *Observând că* $\displaystyle\int_0^1 x^{y-1}dx = \frac{1}{y}$, *unde* $y \neq 0$, *să se calculeze integrala depinzând de parametru*

$$J(y) = \int_0^1 x^{y-1}\ln^m x\,dx \tag{8.26}$$

unde m *este număr natural cu* $m \geq 1$.

Indicaţie. Se derivează de m ori în egalitatea (8.26). ■

Răspuns. $J(y) = \dfrac{(-1)^m m!}{y^{m+1}}$.

■

8.3 Întrebări de autoevaluare

1°. În ce condiţii putem calcula $J'(y)$ dacă $J(y) = \displaystyle\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)dx$? Dar dacă $J(y) = \displaystyle\int_a^{\infty} f(x,y)dx$? ■

2°. Definiţi uniforma convergenţă a integralelor improprii de prima speţă şi a doua speţă care depind de

parametrul y. ■

3°. Enunţaţi criteriul de convergenţă uniformă al lui Weierstrass. ■

4°. Care sunt integralele Γ şi B ale lui Euler? Expuneţi câteva dintre proprietăţile lor. ■

5°. Care sunt integralele Cauchy–Frullani? În ce condiţii se poate determina valoarea unei astfel de integrale şi cât este această valoare? ■

Capitolul 9

MC. 09 – Integrale curbilinii

9.1 Exerciţii rezolvate

Exerciţiul 9.1.1. *Să se calculeze integrala curbilinie de primul tip*

$$I = \int\limits_C ye^{-x}ds, \quad C : \begin{cases} x = & \ln(1+t^2) \\ y = & 2\operatorname{arctg} t - t \end{cases}, t \in [0,1]$$

Soluţie. Conform expresiei elementului de arc ds al unei curbe netede, au loc relţiile

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt \\ &= \sqrt{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 + \left(\frac{2}{1+t^2} - 1\right)^2}dt = \frac{1}{1+t^2} \cdot (1+t^2)dt = dt. \end{aligned}$$

Aplicând formula de calcul a unei integrale curbilinii de primul tip, obţinem:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 (2\operatorname{arctg} t - t)e^{-\ln(1+t^2)}dt; \\ I &= \int_0^1 \left(2\frac{\operatorname{arctg} t}{1+t^2} - \frac{t}{1+t^2}\right)dt; \\ I &= 2\int_0^1 \operatorname{arctg} t \cdot d(\operatorname{arctg} t) - \frac{1}{2}\ln(1+t^2)\Big|_0^1; \\ I &= (\operatorname{arctg} t)^2\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{\pi^2}{16} - \ln\sqrt{2}. \end{aligned}$$

■

Exerciţiul 9.1.2. *Să se calculeze integrala curbilinie de primul tip* $I = \int\limits_C xyzds$, *curba* C *având ecuaţiile*

$$\begin{cases} x = t \\ y = \frac{2}{3}\sqrt{2t^3} \\ z = \frac{1}{2}t^2 \end{cases}, \ t \in [0,1]$$

Soluţie. Conform expresiei elementului de arc ds al unei curbe netede, au loc relţiile

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt; \\ ds &= \sqrt{1 + \frac{4t^4}{2t^3} + t^2} dt = (1+t)dt. \end{aligned}$$

Aplicând formula de calcul a unei integrale curbilinii de primul tip, obţinem:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 t \cdot \frac{2}{3} \cdot (2t^3)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} t^2 (1+t) dt; \\ I &= \frac{\sqrt{2}}{3} \left[\left. \frac{t^{\frac{9}{2}+1}}{\frac{9}{2}+1} \right|_0^1 + \left. \frac{t^{\frac{11}{2}+1}}{\frac{11}{2}+1} \right|_0^1 \right]; \\ I &= \frac{16\sqrt{2}}{143}. \end{aligned}$$

■

Exerciţiul 9.1.3. *Să se calculeze integrala curbilinie de al doilea tip:*

$$I = \int_C x dx + xy dy + xyz dz, \text{ unde curba } C \text{ are ecuaţiile}: \begin{cases} x = e^t \\ y = e^{-t} \\ z = \sqrt{2} t \end{cases}, \; t \in [0, 1]$$

Soluţie. Ţinând cont de reprezentarea parametrică a curbei C, avem:

$$dx = e^t dt, \; dy = -e^{-t} dt, \; dz = \sqrt{2} dt.$$

Rezultă atunci

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left[e^t \cdot e^t + e^t \cdot e^{-t}(-e^{-t}) + e^t \cdot e^{-t} \cdot \sqrt{2} t \cdot \sqrt{2} \right] dt = \int_0^1 (e^{2t} - e^{-t} + 2t) dt = \\ &= \left(\frac{1}{2} e^{2t} + e^{-t} + t^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} e^2 + e^{-1} + 1 - \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2} e^2 + e^{-1} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

■

Exerciţiul 9.1.4. *Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al firului material omogen, având densitatea* $\rho(x, y) = 1$ *şi reprezentarea parametrică*

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}, \; t \in [0, \pi], \; a > 0.$$

Soluţie. Masa firului material este $M = \int_C \rho ds$. Coordonatele centrului de greutate sunt date de:

$$x_G = \frac{1}{M} \int_C x \rho ds, \; y_G = \frac{1}{M} \int_C y \rho ds;$$

$$ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt;$$

$$\begin{cases} x' = 3a\cos^2 t(-\sin t) \\ y' = 3a\sin^2 t\cos t. \end{cases}$$

Conform expresiei elementului de arc, avem

$$ds = \sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t}dt = 3a|\sin t||\cos t|dt.$$

Celelalte elemente se determină folosind formula de calcul a unei integrale curbilinii de primul tip. Se obţin:

$$\begin{aligned} M &= \int_0^\pi 3a|\sin t||\cos t|dt = 3a\int_0^\pi \sin t|\cos t|dt = \\ &= 3a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos t dt - 3a\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin t\cos t dt; \\ M &= 3a\left.\frac{\sin^2 t}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} - 3a\left.\frac{\sin^2 t}{2}\right|_{\frac{\pi}{2}}^\pi = \frac{3a}{2}(1-0) - \frac{3a}{2}(0-1) = 3a; \\ x_G &= \frac{1}{M}\int_C x\rho ds = \frac{1}{3a}\int_C x ds = \frac{1}{3a}\int_0^\pi a\cos^3 t\cdot(3a)\cdot\sin t|\cos t|dt = \\ &= a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\sin t dt - a\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \cos^4 t\sin t dt = \\ &= -a\cdot\left.\frac{\cos^5 t}{5}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} + a\cdot\left.\frac{\cos^5 t}{5}\right|_{\frac{\pi}{2}}^\pi = -\frac{a}{5}(0-1) + \frac{a}{5}(-1-0) = 0; \\ y_G &= \frac{1}{M}\int_C y\rho ds = \frac{1}{3a}\int_C y ds = \frac{1}{3a}\int_0^\pi a\sin^3 t\cdot(3a)\cdot\sin t|\cos t|dt = \\ &= a\int_0^\pi \sin^4 t|\cos t|dt = a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\cos t dt - a\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin^4 t\cos t dt = \\ &= a\left.\frac{\sin^5 t}{5}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} - a\left.\frac{\sin^5 t}{5}\right|_{\frac{\pi}{2}}^\pi = a\left(\frac{1}{5}-0\right) - a\left(0-\frac{1}{5}\right) = \frac{2a}{5}. \end{aligned}$$

■

Exerciţiul 9.1.5. *Să se calculeze lucrul mecanic al forţei* $\mathbf{F} = \dfrac{-k(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})}{z\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, *când punctul de aplicaţie se deplasează pe dreapta* C *de ecuaţii parametrice*

$$\begin{cases} x = at \\ y = bt \\ z = ct \end{cases}, \quad t \in [1, 2].$$

Soluţie. Lucrul mecanic efectuat de forţa $\mathbf{F}$ pe dreapta C are expresia

$$\mathcal{L} = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C X dx + Y dy + Z dz.$$

Avem:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} &= -\frac{kx}{z\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathbf{i} - \frac{ky}{z\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathbf{j} + -\frac{kz}{z\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathbf{k};\\
d\mathbf{r} &= dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k};\\
\mathcal{L} &= \int\limits_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -k\int\limits_C \frac{x}{z\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dx + \frac{y}{z\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dy + \frac{z}{z\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dz.
\end{aligned}$$

Din ecuaţiile parametrice ale lui C obţinem:

$$dx = a\,dt,\ \ dy = b\,dt,\ \ dz = c\,dt;$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -k\int_1^2 \frac{at\cdot a + bt\cdot b + ct\cdot c}{ct\sqrt{a^2t^2+b^2t^2+c^2t^2}}dt = -k\int_1^2 \frac{a^2+b^2+c^2}{c\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\frac{dt}{t} =\\
&= -\frac{k}{c}\sqrt{a^2+b^2+c^2}\ln t\Big|_1^2 = -\frac{k}{c}\sqrt{a^2+b^2+c^2}\ln 2.
\end{aligned}$$

■

9.2 Exerciţii propuse cu indicaţii şi răspunsuri

Exerciţiul 9.2.1. *Să se calculeze integrala curbilinie de primul tip:*

$$I = \int\limits_C y^5 ds;\ C:\ x = \frac{y^4}{4},\ y\in[0,2]$$

Indicaţie. Parametrul pe curbă este y, deci

$$ds = \sqrt{1+(f'(y))^2}dy = \sqrt{1+y^6}dy.$$

■

Răspuns. $I = \frac{1}{9}\left(65\sqrt{65}-1\right).$ ■

Exerciţiul 9.2.2. *Să se calculeze integrala curbilinie de al doilea tip:*

$$I = \int\limits_C y^2dx - x^2dy;\ C:\ \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases},\ t\in[0,2\pi].$$

Indicaţie. Se aplică formula de calcul a unei integrale curbilinii de al doilea tip. ■

Răspuns. $I = 0$. ■

Exerciţiul 9.2.3. *Să se calculeze integrala curbilinie, constatând în prealabil că este independentă de drum:*

$$I = \int_C yzdx + xzdy + xydz.$$

Capetele curbei de integrare sunt punctele $A(1,1,0)$, $B(2,3,1)$.

Indicaţie. Se arată că: $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$; $\dfrac{\partial Q}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial y}$; $\dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial x}$. O primitivă a expresiei diferenţiale $\omega = yzdx + zxdy + xydz$ poate fi $U(x,y,z) = xyz$. ■

Răspuns. $I = 6$. ■

Exerciţiul 9.2.4. *Să se calculeze coordonatele centrului de greutate a firului material, având densitatea* $\rho = 1$ *şi reprezentarea parametrică*

$$C : \begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \\ z = e^t \end{cases}, \ t \in (-\infty, 0].$$

Indicaţie. Se folosesc expresiile de calcul pentru masă şi coordonatele centrului de greutate G. ■

Răspuns. $M = \sqrt{3}$; $\quad G\left(\dfrac{2}{5}, -\dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{2}\right)$. ■

Exerciţiul 9.2.5. *Să se calculeze lucrul mecanic al forţei* $\mathbf{F} = -k(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$, *când punctul de aplicaţie se deplasează pe curba*

$$C : \begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = b\sin^3 t \end{cases}, \ t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Indicaţie. Lucrul mecanic $\mathcal{L}$ este dat de $\mathcal{L} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. ■

Răspuns. $\mathcal{L} = \dfrac{k(a^2 - b^2)}{2}$. ■

9.3 Întrebări de autoevaluare

1°. Care sunt proprietăţile relaţiei de echivalenţă în mulţimea drumurilor din plan? ■

2°. Dacă reprezentarea parametrică a drumului (d) neted în spaţiu este:

$$(d) : \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \chi(t) \end{cases}, \ t \in [a, b]$$

Ce reprezintă

$$l(d) = \int_a^b \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2}dt = \int_a^b \left\| \frac{dr}{dt}(t) \right\| dt \ ?$$

■

3°. Dacă (AB) este un arc de curbă din planul Oxy, neted sau neted pe porţiuni, iar ρ este o funcţie continuă, pozitivă în punctele lui (AB), ce semnificaţie are numărul $\int\limits_{(AB)} \rho(x,y)ds$? ■

4°. Pentru firul material spaţial de configuraţie (AB) şi densitate $\rho(x,y,z)$, ce reprezintă numerele:

$$\begin{aligned} I_O &= \int\limits_{(AB)} (x^2+y^2+z^2)\rho(x,y,z)ds; \\ I_{Ox} &= \int\limits_{(AB)} (y^2+z^2)\rho(x,y,z)ds; \\ I_{Oxz} &= \int\limits_{(AB)} y^2\rho(x,y,z)ds \ ? \end{aligned}$$

■

5°. Dacă P, Q şi R sunt componentele unei forţe $\mathbf{F}$ care acţionează în punctele curbei netede sau netede pe porţiuni (AB), ce reprezintă expresia $I = \int\limits_{(AB)} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$? ■

Capitolul 10

MC. 10 – Integrala dublă

10.1 Exerciţii rezolvate

Exerciţiul 10.1.1. *Să se calculeze*

$$I=\iint\limits_D \frac{dxdy}{1+yx^2},\ \text{unde } D=[-1,1]\times[1,4].$$

Soluţie. Funcţia de sub semnul integrală este continuă. Domeniul D este un interval, deci este simplu în raport cu ambele axe. Vom aplica, pentru calcul, formula de reducere a unei integrale duble la o integrală iterată, în ordinea x, y spre exemplu. Avem

$$\begin{aligned} I &= \int_1^4\left(\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+yx^2}\right)dy=\int_1^4\left[\frac{1}{\sqrt{y}}\operatorname{arctg} x\sqrt{y}\right]\Bigg|_{x=-1}^{x=1}dy= \\ &= \int_1^4\left[\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{y}}{\sqrt{y}}-\frac{\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{y}\right)}{\sqrt{y}}\right]dy=2\int_1^4\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{y}}{\sqrt{y}}dy. \end{aligned}$$

Efectuăm substituţia: $\sqrt{y}=t,\ y=t^2,\ dy=2t\,dt.$

Astfel,

$$\begin{aligned} I &= 2\int_1^2\frac{\operatorname{arctg} t}{t}\cdot 2t\,dt=4\int_1^2\operatorname{arctg} t\,dt=4\left(t\operatorname{arctg} t|_1^2-\int_1^2\frac{t}{1+t^2}dt\right)= \\ &= 4\left[2\operatorname{arctg} 2-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\Bigg|_1^2\right]=8\operatorname{arctg} 2-\pi-2(\ln 5-\ln 2)= \\ &= 8\operatorname{arctg} 2-\pi+\ln\frac{4}{25}. \end{aligned}$$

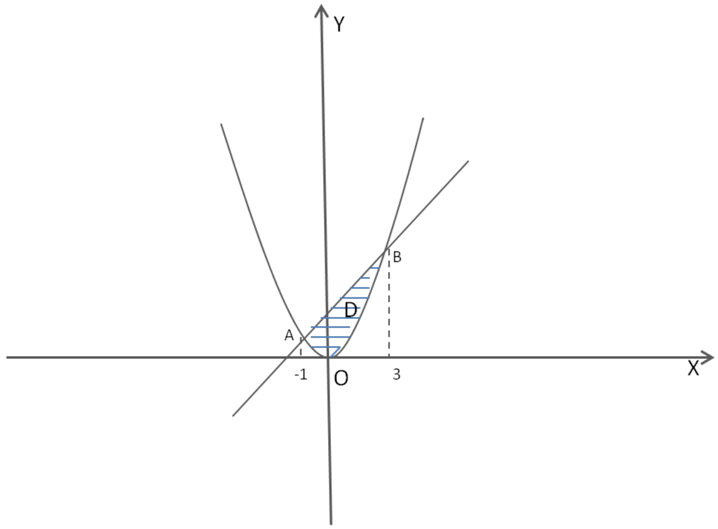
■

Exerciţiul 10.1.2. *Să se calculeze*

$$I=\iint\limits_D xydxdy,$$

dacă D este limitat de parabola $y=x^2$ şi de dreapta $y=2x+3$.

Soluţie. Domeniul D, reprezentat mai jos, este simplu în raport cu ambele axe.



Vom integra în ordinea y, x, deoarece este mai comod să integrăm în această ordine decât în ordinea inversă. Proiecţia domeniului D pe axa Ox este intervalul $[-1,3]$. Curba care îl mărgineşte inferior are reprezentarea $y = x^2$ $(-1 \leq x \leq 3)$, iar curba care îl mărgineşte superior are reprezentarea $y = 2x+3$ $(-1 \leq x \leq 3)$. Aplicând formula de reducere a integralei duble la o integrală definită, obţinem

$$I = \int_{-1}^{3} dx \int_{x^2}^{2x+3} xy\,dy = \int_{-1}^{3} \frac{xy^2}{2}\Big|_{x^2}^{2x+3} dx = \int_{-1}^{3} \frac{x}{2}\left[(2x+3)^2 - x^4\right] dx = 53 + \frac{1}{3}.$$

■

Exerciţiul 10.1.3. *Să se calculeze, cu ajutorul formulei lui Riemann–Green, integrala curbilinie*

$$I = \int\limits_{C} \frac{1}{2}\left[y\sqrt{x^2+y^2} - x^2 \ln\left(y + \sqrt{x^2+y^2}\right)\right] dx + y^2\left[xy + \ln\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right)\right] dy$$

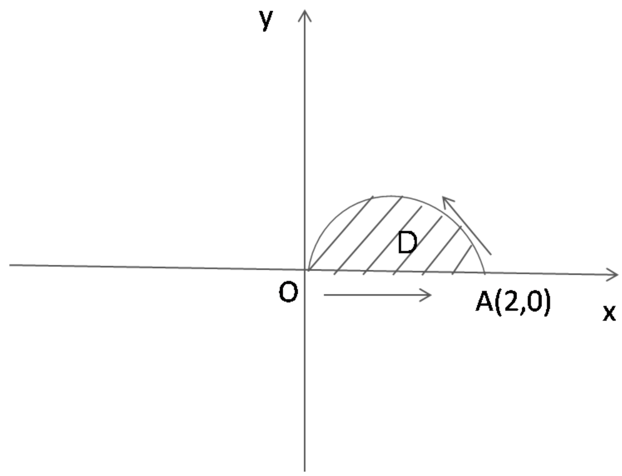
unde

$$C : \begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, \ t \in [0, \pi].$$

Soluţie. Să observăm că este dificil să calculăm direct integrala dată. Este firesc să încercăm o nouă metodă de calcul, folosindu-ne de formula lui Riemann–Green. Imaginea curbei C este semicercul superior

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 2x, \ y \geq 0\}$$

reprezentat mai jos:



Curba C este simplă şi rectificabilă, dar nu este închisă. Pentru a putea folosi formula lui Green, trebuie să completăm semicercul K prin imaginea unei noi curbe simple şi rectificabile C_1, până la un contur închis. Curba C_1 trebuie astfel aleasă, încât integrala curbilinie de-a lungul ei să poată fi calculată cât mai uşor. Vom completa semicercul K prin segmentul OA, unde $A = (2, 0)$. Obţinem astfel domeniul $D\ \{x^2 + y^2 \leq 2x,\ y \geq 0\}$.

Pentru curba C_1 vom alege reprezentarea parametrică

$$x = t,\ y = 0,\ t \in [0, 2].$$

Curbele C şi C_1 sunt juxtapozabile, iar reuniunea lor $\Gamma = C \cup C_1$ este o curbă închisă, simplă, rectificabilă şi determină orientarea pozitivă a lui D. Să definim funcţiile P şi Q pe domeniul D prin relaţiile

$$P(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[y\sqrt{x^2+y^2} - x^2\ln\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right] & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$Q(x,y) = \begin{cases} y^2\left[xy + \ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right] & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

şi să cercetăm dacă formula lui Green este aplicabilă.

Funcţiile P şi Q sunt, evident, continue pentru $(x, y) \neq (0, 0),\ (x, y) \in D$. Din relaţiile

$$\left|x^2\ln\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right| = x^2 \cdot \ln\frac{1}{y+\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{x^2}{y+\sqrt{x^2+y^2}} \leq x,$$

$$\left|y^2\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right| = y^2 \cdot \ln\frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{y^2}{x+\sqrt{x^2+y^2}} \leq y,$$

adevărate pentru $x > 0,\ y > 0,\ y + \sqrt{x^2+y^2} \leq 1$ şi $x + \sqrt{x^2+y^2} \leq 1$, deducem că

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} P(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} Q(x,y) = 0,$$

de unde rezultă continuitatea funcţiilor P şi Q în origine. Pentru $(x, y) \neq (0, 0)$ avem

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{\partial Q}{\partial x} = y^3 + \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

În origine, calculând derivatele parţiale după definiţie, obţinem

$$\frac{\partial P}{\partial y}(0,0) = 0,\ \frac{\partial Q}{\partial x}(0,0) = 0.$$

Din inegalitatea $\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq y \ (y \geq 0)$ deducem că

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial P}{\partial y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0,$$

de unde rezultă continuitatea derivatelor parţiale $\frac{\partial P}{\partial y}$ şi $\frac{\partial Q}{\partial x}$ în origine, şi deci, pe tot domeniul D.

În concluzie, sunt verificate condiţiile din teoremă pentru domenii având ca frontieră o curbă simplă, închisă şi rectificabilă şi formula lui Riemann-Green este aplicabilă. Avem:

$$\begin{aligned} \int_\Gamma Pdx + Qdy &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy; \\ \int_\Gamma Pdx + Qdy &= \iint_D y^3 dxdy. \end{aligned}$$

Notând integrala curbilinie de-a lungul curbei C_1 cu I_1 şi integrala dublă cu J, egalitatea precedentă devine

$$I + I_1 = J.$$

Integrala I_1 o calculăm aplicând formula de reducere a unei integrale curbilinii la o integrală Riemann, iar integrala J o calculăm aplicând formula de reducere a unei integrale duble la o integrală iterată în ordinea y, x. Avem:

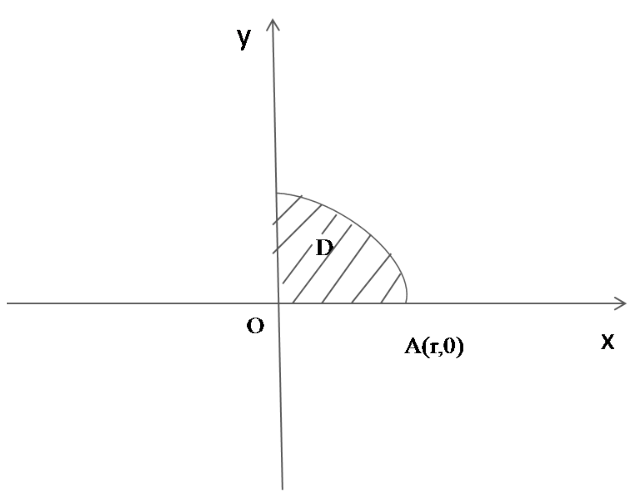
$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^2 \frac{1}{2}[-t^2 \ln t]dt = -\frac{1}{2}\left[\frac{t^3 \cdot \ln t}{3}\bigg|_0^2 - \frac{1}{3}\int_0^2 t^2 dt\right] = \frac{4}{9}(1 - 3\ln 2); \\ J &= \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} y^3 dy = \frac{1}{4}\int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \frac{4}{15}. \end{aligned}$$

Obţinem $I = J - I_1 = \frac{4}{3}\left[\ln 2 - \frac{2}{15}\right]$. ■

Exerciţiul 10.1.4. *Folosind o schimbare de variabile convenabilă, să se calculeze:*

$$I = \iint_D xy\, dxdy, \ \ D: \ x^2 + y^2 \leq r^2, \ x \geq 0, \ y \geq 0.$$

Soluţie. Domeniul D are următoarea reprezentare:



Folosim coordonatele polare

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta. \end{cases}$$

Din inegalităţile care caracterizează domeniul D vom obţine

$$\begin{cases} 0 \le \rho \le r \\ \cos\theta \ge 0 \\ \sin\theta \ge 0. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \rho \in [0, r] \\ \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}.$$

Avem: $J = \dfrac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} = \rho$.

Domeniul D este transformat în domeniul $\Delta : \left\{0 \le \rho \le r,\ 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}\right\}$.
Calculând integrala, obţinem:

$$I = \iint_{\Delta} \rho\cos\theta\rho\sin\theta\rho\, d\rho d\theta;$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^r \rho\cos\theta\cdot\rho\sin\theta\cdot\rho\, d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\sin\theta\, d\theta \int_0^r \rho^3 d\rho;$$

$$I = \left.\frac{\sin^2\theta}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^r = \frac{r^4}{8}.$$

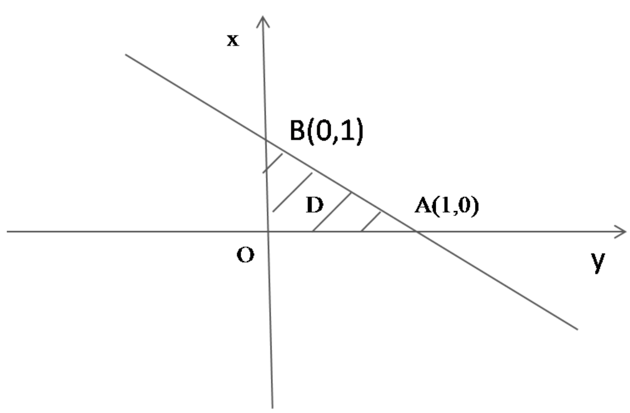
■

Exerciţiul 10.1.5. *Să se calculeze momentele de inerţie în raport cu axele de coordonate ale plăcii materiale*

$$D:\ x + y \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0$$

având densitatea $\rho(x,y) = 1 + xy$.

Soluţie. Domeniul D este simplu în raport cu ambele axe Ox şi Oy. Domeniul D are reprezentarea



Vom integra în ordinea y, x:

$$I_x = \iint_D y^2\rho(x,y)dxdy = \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} y^2(1+xy)dy\right] dx;$$

$$I_x = \int_0^1 \left.\left(\frac{y^3}{3} + x\cdot\frac{y^4}{4}\right)\right|_0^{1-x} dx = \int_0^1 \left[\frac{(1-x)^3}{3} + \frac{x}{4}(1-x)^4\right] dx.$$

Efectuăm schimbarea de variabilă $1 - x = t$. Rezultă:

$$\begin{cases} x = 0 \Longrightarrow t = 1; \\ x = 1 \Longrightarrow t = 0; \\ -dx = dt. \end{cases}$$

Calculând integralele, obţinem:

$$I_x = \int_1^0 \left(\frac{t^3}{3} + \frac{1-t}{4} \cdot t^4\right) dt(-1) = \int_0^1 \left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{4} - \frac{t^5}{4}\right) dt = \left(\frac{t^4}{12} + \frac{t^5}{20} - \frac{t^6}{24}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{11}{120}$$

$$I_y = \iint_D x^2(1+xy)dxdy = \frac{11}{120}.$$

■

10.2 Exerciţii propuse cu indicaţii şi răspunsuri

Exerciţiul 10.2.1. *Să se calculeze*

$$I = \iint_D \frac{\sqrt{y}dxdy}{(1+xy)\sqrt{x}},$$

unde $D: \ \{1 \leq x \leq 3; \ 0 \leq y \leq 1\}$.

Indicaţie. Funcţia de sub semnul integrală este continuă. Domeniul de integrare este simplu în raport cu ambele axe. Dacă folosim ordinea de integrare x, y, obţinem

$$I = \int_0^1 \left(\int_1^3 \frac{\sqrt{y}dx}{(1+xy)\sqrt{x}}\right) dy.$$

■

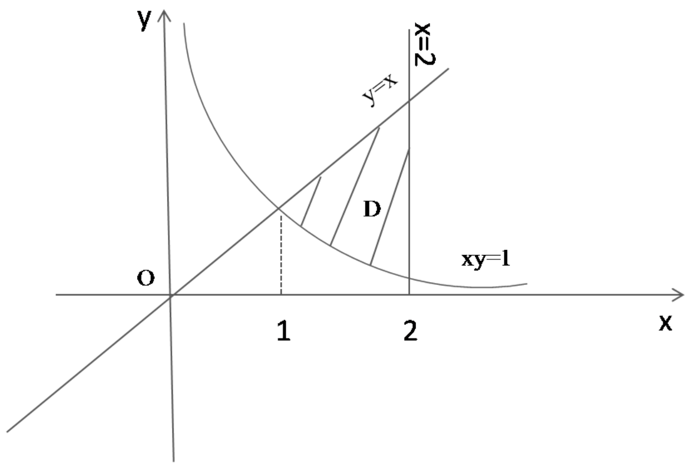
Răspuns. $I = 2 - \dfrac{2}{\sqrt{3}} - \dfrac{\pi}{9}$. ■

Exerciţiul 10.2.2. *Să se calculeze*

$$I = \iint_D \frac{x^2}{y^2} dxdy,$$

unde D *este mărginit de dreptele* $x = 2, \ y = x$ *şi de hiperbola echilateră* $xy = 1$.

Indicaţie. Domeniul D este simplu în raport cu Oy şi are reprezentarea



$$D : \begin{cases} 1 \le x \le 2 \\ \frac{1}{x} \le y \le x. \end{cases}$$

Integrala I devine $I = \int_1^2 \left[\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2} dy \right] dx.$ ■

Răspuns. $I = \frac{9}{4}.$ ■

Exerciţiul 10.2.3. *Folosind o schimbare de variabile convenabilă, să se calculeze:*

$$I = \iint_D \frac{dxdy}{1+xy}, \text{ unde } D \begin{cases} 1 \le xy \le 2 \\ x \le y \le 3x \end{cases}$$

Indicaţie. Scrierea lui D în forma

$$D : \begin{cases} 1 \le xy \le 2 \\ 1 \le \frac{y}{x} \le 3 \end{cases}$$

sugerează schimbarea de variabile

$$\begin{cases} xy = u \\ \frac{y}{x} = v, \end{cases}$$

domeniul devenind astfel un dreptunghi cu laturile paralele cu noile axe. ■

Răspuns. $I = \left(\frac{\ln 3}{2} \right)^2.$ ■

Exerciţiul 10.2.4. *Să se calculeze volumul elipsoidului de ecuaţie*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Indicaţie. Se constată că

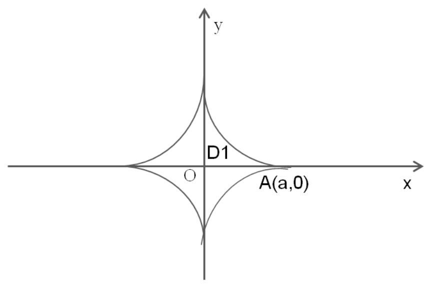
$$V = 2\iint\limits_D c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dxdy,$$

unde $D:\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1\le 0$ este proiecţia elipsoidului pe planul xOy. ■

Răspuns. $I=\dfrac{4\pi abc}{3}$ ■

Exerciţiul 10.2.5. *Să se calculeze aria domeniului* $D\subset\mathbb{R}^2$ *mărginit de curba:* $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

Indicaţie. Curba care mărgineşte domeniul este astroida cu braţe egale



Notând aria domeniului cu (D), avem $(D)=\iint\limits_D dxdy = 4\iint\limits_{D_1} dxdy.$

Se efectuează schimbarea de variabile

$$\begin{cases} x = r\cos^3 t\\ y = r\sin^3 t.\end{cases}$$

■

Răspuns. Aria domeniului mărginit de astroida din enunţ este $\dfrac{3\pi a^2}{8}$. ■

10.3 Întrebări de autoevaluare

1°. Ce interpretare are egalitatea $\iint\limits_{I_2} f(x,y)dxdy = \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx,$ unde $I_2=[a,b]\times[c,d]$? ■

2°. Enunţaţi definiţia unui **domeniu simplu în raport cu axa** Oy. ■

3°. Enunţaţi definiţia unui **domeniu simplu în raport cu axa** Ox. ■

4°. Demonstraţi formula integrală Riemann – Green

$$\int\limits_\Gamma P(x,y)dx+Q(x,y)dy = \iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

■

5°. Ce reprezintă formula $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_\Omega f\left(\varphi(u,v),\psi(u,v)\right)\left|\dfrac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}(u,v)\right|dudv$?

În caz că o recunoaşteţi, demonstraţi–o. ■

Capitolul 11

MC. 11 – Integrale de suprafaţă

11.1 Exerciţii rezolvate

Exerciţiul 11.1.1. *Să se calculeze aria unei emisfere de ecuaţii:*

$$S:\begin{cases} x = R\cos u\sin v \\ y = R\sin u\sin v \\ z = R\cos v \end{cases},\quad u\in[0,2\pi],\ v\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

Soluţie. Notăm: $A = \text{aria}\, S$; $D = [0,2\pi]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Atunci

$$A = \iint\limits_{S} d\sigma = \iint\limits_{D} \sqrt{EG-F^2}dudv.$$

$$\begin{cases} x_u = -R\sin u\sin v, & y_u = R\cos u\sin v, & z_u = 0 \\ x_v = R\cos u\cos v, & y_v = R\sin u\cos v, & z_v = -R\sin v; \end{cases}$$

$$\begin{cases} E = (x_u)^2+(y_u)^2+(z_u)^2 = R^2\sin^2 v \\ F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v = 0 \\ G = (x_v)^2+(y_v)^2+(z_v)^2 = R^2; \end{cases}$$

$$EG - F^2 = R^4\sin^2 v;$$

$$A = \iint\limits_{D} R^2\sin v\, dudv = R^2\int_0^{2\pi} du\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin v dv = 2\pi R^2.$$

■

Exerciţiul 11.1.2. *Să se calculeze aria pânzei conice* S, *de ecuaţie* $z=\sqrt{x^2+y^2}$, *cuprinsă între planele* $z=0$ *şi* $z=1$.

Soluţie. Fie D proiecţia pânzei conice pe planul xOy. Atunci $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$ este un disc închis de rază 1. Notăm cu $A = \text{aria}\, S$. Atunci

$$A = \iint_S d\sigma = \iint_D \sqrt{1+p^2+q^2}dxdy,$$

unde

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

$$d\sigma = \sqrt{1+p^2+q^2}dxdy = \sqrt{2}dxdy.$$

Astfel,

$$A = \iint_D \sqrt{2}dxdy = \pi\sqrt{2},$$

deoarece aria discului D este π.

■

Exerciţiul 11.1.3. *Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al unei pânze subţiri în formă de emisferă, de ecuaţie* $S:\ z = \sqrt{R^2-x^2-y^2}$*, densitatea* ρ_S *fiind constantă.*

Soluţie. Avem:

$$\begin{cases} p = \dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \\ q = \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}; \end{cases}$$

$$d\sigma = \sqrt{1+p^2+q^2}dxdy = \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy;$$

$$M = \iint_S \rho_S\, d\sigma = \iint_D \rho_S\sqrt{1+p^2+q^2}dxdy = \rho_S R \iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},$$

unde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq R^2\}$. este proiecţia lui S pe planul xOy, iar M este masa pânzei.

Trecând la coordonate polare obţinem

$$M = \rho_S R \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}} = 2\pi\rho_S R^2.$$

În virtutea omogenităţii pânzei subţiri S şi a simetriei faţă de Oz, rezultă că x_G şi y_G sunt nuli. Prin urmare, nu avem de calculat decât pe z_G. Avem

$$M \cdot z_G = \rho_S \iint_S z\, d\sigma = \rho_S R \iint_D dxdy = \rho_S \pi R^3.$$

Rezultă: $x_G = 0,\ y_G = 0,\ z_G = \dfrac{R}{2}.$

■

Exerciţiul 11.1.4. *Să se calculeze*

$$\iint_{S+} x\, dydz + y\, dzdx + z\, dxdy,$$

unde S^+ *fiind faţa exterioară a sferei* $x^2+y^2+z^2 = a^2$.

Soluţie. Sunt de calculat trei integrale de suprafaţă. Fie mai întâi,

$$I_1 = \iint\limits_{S^+} z\,dxdy$$

Notând cu S_1 emisfera situată deasupra planului xOy, de ecuaţie $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ şi cu S_2 emisfera inferioară, de ecuaţie $z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, rezultă că

$$I_1 = \iint\limits_{S_1^+} z\,dxdy + \iint\limits_{S_2^+} z\,dxdy = \iint\limits_{S_1^+} z\cos\gamma\,d\sigma + \iint\limits_{S_2^+} z\cos\gamma\,d\sigma,$$

unde γ este unghiul format de normala exterioară la sferă cu axa Oz. Deoarece pe S_1^+ avem $\cos\gamma > 0$, iar pe S_2^+ avem $\cos\gamma < 0$, rezultă că

$$I_1 = \iint\limits_{D} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}dxdy + \iint\limits_{D} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}dxdy = 2\iint\limits_{D} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}dxdy,$$

unde D este interiorul cercului $x^2 + y^2 = a^2$ din planul xOy. Trecând la coordonate polare, rezultă

$$I_1 = 2\iint\limits_{\Delta} (a^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}}\rho\,d\rho d\theta, \text{ unde } \Delta : \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 < \rho \le a \end{cases}$$

sau

$$I_1 = 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \rho\sqrt{a^2 - \rho^2}d\rho = -\frac{4\pi}{3}\sqrt{(a^2 - \rho^2)^3}\Big|_0^a = \frac{4\pi a^3}{3}.$$

Raţionând la fel pentru calculul celorlalte două integrale, rezultă că integrala

$$I_2 = \iint\limits_{S^+} y\,dxdz$$

se transformă într-o integrală dublă referitoare la domeniul $x^2 + z^2 \le a^2,\ y = 0$, iar integrala

$$I_3 = \iint\limits_{S^+} x\,dydz$$

se reduce la calculul unei integrale duble pe domeniul $y^2 + z^2 \le a^2,\ x = 0$. Valorile lor sunt egale cu cea obţinută pentru I_1. Avem,

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = 4\pi a^3.$$

■

Exerciţiul 11.1.5. *Să se calculeze*

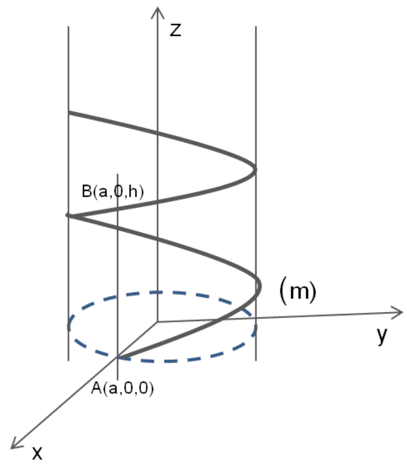
$$\int\limits_{A\overset{\frown}{m}B} (x^2 - yz)dx + (y^2 - xz)dy + (z^2 - xy)dz$$

de-a lungul arcului de elice

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = \dfrac{ht}{2\pi}, \end{cases}$$

situat între punctul $A(a,0,0)$ şi punctul $B(a,0,h)$, unde $a > 0$ şi $b > 0$.

Soluţie. În figura de mai jos este desenată **elicea cilindrică de pas constant**.



Se observă că punctele A şi B sunt situate pe aceeaşi paralelă la Oz. Deoarece curba nu este închisă, sub această formă nu poate fi aplicată formula lui Stokes. Completând însă arcul $\overset{\frown}{AmB}$ cu segmentul $\overline{BA}$ se obţine o curbă închisă. Celelalte condiţii de aplicabilitate ale formulei lui Stokes fiind satisfăcute, avem

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AmB}} + \int\limits_{\overset{\frown}{BA}} = \iint\limits_{S} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} d\sigma = 0,$$

S fiind o porţiune de suprafaţă mărginită de curba închisă $\overset{\frown}{AmBA}$.

Ultima integrală este nulă deoarece integrandul este nul. Urmează atunci că avem

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AmB}} = -\int\limits_{\overset{\frown}{BA}} = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} (x^2 - yz)dx + (y^2 - xz)dy + (z^2 - xy)dz = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} z^2 dz = \int_0^h z^2 dz = \frac{h^3}{3},$$

deoarece pe $\overset{\frown}{AB}$ avem $y = 0$ şi $x = a$. ■

11.2 Exerciţii propuse cu indicaţii şi răspunsuri

Exerciţiul 11.2.1. *Să se calculeze aria sferei cu centrul în originea reperului şi de rază R.*

Indicaţie. Ecuaţiile parametrice ale sferei sunt

$$S : \begin{cases} x = R\cos\varphi\sin\theta \\ y = R\sin\varphi\sin\theta \\ z = R\cos\theta \end{cases}, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \;\; \theta \in [0, \pi].$$

Se ştie că $A = \text{aria}\, S = \iint\limits_{D} \sqrt{EG - F^2}\, d\theta d\varphi$, unde $D = \{(\theta, \varphi) : \theta \in [0, \pi], \;\; \varphi \in [0, 2\pi]\}$. ■

Răspuns. Aria lui S este $4\pi R^2$. ■

Exerciţiul 11.2.2. *Să se calculeze*

$$I = \iint\limits_S z\,d\sigma$$

unde S *este porţiunea paraboloidului* $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ *decupată de cilindrul* $x^2 + y^2 = 8$.

Indicaţie. Calculăm mai întâi $d\sigma = \sqrt{1 + p^2 + q^2}dxdy$, cu $p = x$ şi $q = y$. Astfel $d\sigma = \sqrt{1 + x^2 + y^2}dxdy$. ■

Răspuns. $I = \frac{596}{15}$. ■

Exerciţiul 11.2.3. *Să se calculeze integrala de suprafaţă de al doilea tip*

$$I = \iint\limits_{S^-} y\,dydz + z\,dzdx + 3x\,dxdy$$

unde S^- *este faţa interioară a sferei* $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$*, situată în primul octant.*

Indicaţie. Normala dirijată spre interiorul sferei are versorul $\vec{n} = \left(-\frac{x}{a}, -\frac{y}{a}, -\frac{z}{a}\right)$.

Atunci $I = \iint\limits_S (y\cos\alpha + z\cos\beta + 3x\cos\gamma)\,d\sigma = -\frac{1}{a}\iint\limits_S (xy + zy + 3xz)d\sigma$. ■

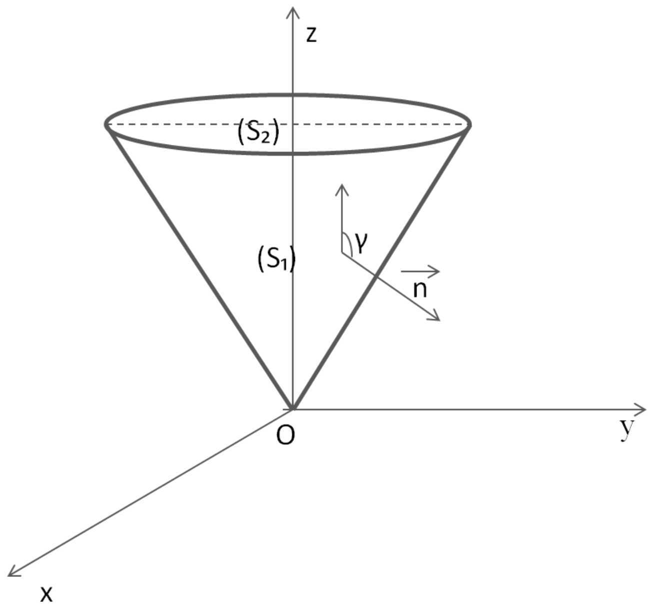
Răspuns. $I = -2a^3$. ■

Exerciţiul 11.2.4. *Să se calculeze*

$$\iint\limits_{S^+} (y - z)dydz + (z - x)dzdx + (x - y)dxdy,$$

unde S^+ *este faţa exterioară închisă a conului* $z = \sqrt{x^2 + y^2},\ 0 \le z \le h$.

Indicaţie. Suprafaţa S are reprezentarea



Se separă integrala dată în două integrale, după porţiunile de suprafaţă S_1 - faţa laterală a conului şi S_2 - capacul $z = h$, astfel că

$$\iint_{S^+} = \iint_{S_1^+} + \iint_{S_2^+} .$$

■

Răspuns. $I = 0$. ■

Exerciţiul 11.2.5. *Să se determine centrul de greutate G al unei calote sferice omogene de rază R şi înălţime $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}R$.*

Indicaţie. Din motive de simetrie $x_G = y_G = 0$, iar $z_G = \dfrac{1}{M}\displaystyle\iint_S z\,d\sigma$, unde $M = \displaystyle\iint_S d\sigma$. ■

Răspuns. $G\left(0, 0, \dfrac{R\sqrt{2}}{2}\right)$. ■

11.3 Întrebări de autoevaluare

1°. Să se scrie ecuaţia planului tangent la pânza parametrică netedă

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}, \ (u, v) \in A \subset \mathbb{R}^2,$$

într–un punct curent al ei. ■

2°. Să se scrie elementul de arie $d\sigma$ al unei suprafeţe netede cu reprezentarea parametrică dată anterior. ■

3°. Ce reprezintă egalitatea $\iint\limits_S f(x,y,z)d\sigma = \iint\limits_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+p^2(x,y)+q^2(x,y)}dxdy$?

În caz că o recunoaşteţi, încercaţi să o demonstraţi. ■

4°. Dacă S este o pânză materială cu elementul de masă dm, atunci ce semnifică numerele: $I_x = \iint\limits_S (y^2 + z^2)dm$; $I_{yz} = \iint\limits_S x^2 dm$; $I_O = \iint\limits_S (x^2+y^2+z^2)dm$? ■

5°. Care este problema concretă care sugerează introducerea noţiunii de **integrală de suprafaţă de al doilea tip**? ■

6°. Demonstraţi formula lui Stokes

$$\int\limits_\Gamma P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \iint\limits_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

unde $\Gamma = \partial S$. ■

Capitolul 12

MC. 12 – Integrala triplă

12.1 Exerciţii rezolvate

Exerciţiul 12.1.1. *Să se calculeze* $I = \iiint\limits_V z\,dxdydz$, *unde* V *este domeniul definit de inegalităţile:*

$$x^2 + y^2 + z^2 \le a^2;\ x^2 + y^2 \le z^2;\ z \ge 0.$$

Soluţie. Suprafaţa dată de ecuaţia $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ este o sferă de rază a, iar suprafaţa $z^2 = x^2 + y^2$ este un con cu vârful în origine şi cu axă de simetrie Oz.

Deoarece $z \ge 0$, din con reţinem doar pânza superioară $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Intersecţia celor două suprafeţe este curba definită de ecuaţiile

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{a^2}{2} \\ z = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

adică un cerc de rază $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ situat la înălţimea $z = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Proiecţia lui V pe planul xOy este deci discul D cu centrul în origine şi raza $a\sqrt{2}$. Ecuaţiile explicite ale suprafeţelor care mărginesc pe V sunt $z = \sqrt{x^2 + y^2},\ z \in \left[0, \dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right]$ şi $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2},\ z \in \left[\dfrac{a\sqrt{2}}{2}, a\right]$. Deci explicitarea lui V este dată de

$$V = \left\{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\right\},$$

iar integrala triplă se reduce astfel

$$I = \iiint\limits_V z\,dxdydz = \iint\limits_D \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} z\,dz\right) dxdy = \iint\limits_D \frac{z^2}{2}\Bigg|_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dxdy = \frac{1}{2}\iint\limits_D (a^2 - 2x^2 - 2y^2)dxdy.$$

Pentru calculul acestei integrale duble folosim coordonatele polare. Domeniul D este transformat în

$$\Delta = \left\{(\rho, \theta)\ \middle|\ 0 \le \rho \le \frac{a}{\sqrt{2}};\ 0 \le \theta \le 2\pi\right\},$$

iar jacobianul transformării este $J = \rho$. Astfel, integrala devine

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{a\sqrt{2}}{2}} \left(\int_0^{2\pi} (a^2 - 2\rho^2\cos^2\theta - 2\rho^2\sin^2\theta)\rho\, d\theta\right) d\rho = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{a\sqrt{2}}{2}} (a^2 - 2\rho^2)\rho\, d\rho = -\frac{\pi}{8}(a^2-2\rho^2)^2\Big|_0^{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{\pi a^4}{8}. \end{aligned}$$

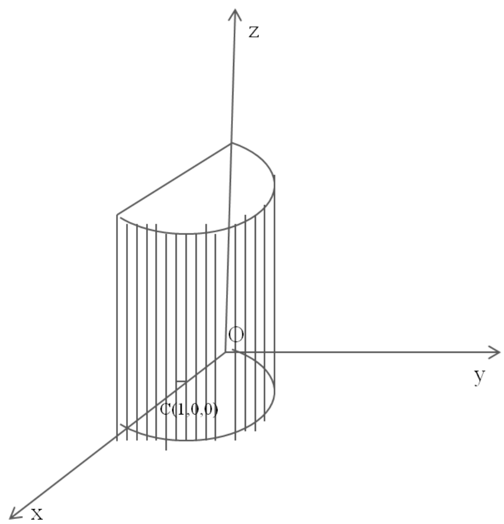
■

Exerciţiul 12.1.2. *Să se calculeze*

$$I = \iiint\limits_V (x^2+y^2)dxdydz,$$

unde V *este definit de inecuaţiile:* $y \geq 0;\ x^2+y^2-2x \leq 0;\ 0 \leq z \leq 1.$

Soluţie. V este un corp cilindric secţionat de planele $z = 0,\ z = 1$ şi $y = 0$, cu următoarea reprezentare



Prin urmare

$$I = \iiint\limits_V (x^2+y^2)dxdydz = \iint\limits_D \left(\int_0^1 (x^2+y^2)dz\right) dxdy,$$

unde D este interiorul semicercului $z = 0,\ y \geq 0,\ x^2+y^2-2x \leq 0$. Rezultă

$$I = \iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy.$$

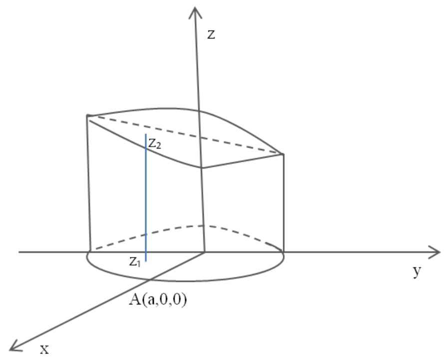
Integrala dublă se calculează în coordonate polare şi se obţine $I = \iint\limits_\Delta \rho^3 d\rho d\theta$, unde

$$\Delta = \left\{(\rho,\theta)\,\Big|\,0 \leq \rho \leq 2\cos\theta,\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Se găseşte $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} \rho^3 d\rho = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2\theta)^2 d\theta = \frac{3\pi}{4}.$ ■

Exerciţiul 12.1.3. *Să se calculeze* $I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, *unde* V *este domeniul limitat de suprafeţele* $x+y+z=2a,\ x^2+y^2=a^2$ *şi* $z=0$, *iar* $a>0$.

Soluţie. Domeniul V este mărginit lateral de cilindrul $x^2+y^2=a^2$, inferior de planul de ecuaţie $z=0$ şi superior de planul $x+y+z=2a$, cu următoarea reprezentare



Avem

$$I = \iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\left(\int_{z_1}^{z_2} dz\right) dxdy,$$

unde $D: z=0,\ x^2+y^2 \le a^2$, iar $z_1=0,\ z_2=2a-x-y$. Urmează atunci

$$I = \iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\left(z\Big|_0^{2a-x-y}\right) dxdy = \iint\limits_D (2a-x-y)\sqrt{x^2+y^2}dxdy.$$

Trecând în coordonate polare, ultima integrală devine:

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_\Delta (2a-\rho\cos\theta-\rho\sin\theta)\rho^2 d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a (2a\rho^2-\rho^3\cos\theta-\rho^3\sin\theta)d\rho; \\ I &= \int_0^{2\pi}\left(2a\frac{\rho^3}{3}-\frac{\rho^4}{4}\cos\theta-\frac{\rho^4}{4}\sin\theta\right)\Big|_0^a d\theta = \int_0^{2\pi}\left(2a\cdot\frac{a^3}{3}-\frac{a^4}{4}\cos\theta-\frac{a^4}{4}\sin\theta\right)d\theta = \\ &= \frac{4\pi a^4}{3}-\frac{a^4}{4}\sin\theta\Big|_0^{2\pi}+\frac{a^4}{4}\cos\theta\Big|_0^{2\pi} = \frac{4\pi a^4}{3}. \end{aligned}$$

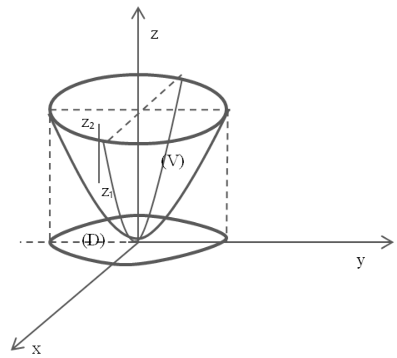
■

Exerciţiul 12.1.4. *Să se calculeze integrala triplă*

$$I = \iiint\limits_V z^2 dxdydz,$$

unde V *este definit de inecuaţiile* $x^2+y^2 \le 2z$ *şi* $0 \le z \le 2$.

Soluţie. Domeniul V este simplu în raport cu Oz, deoarece este interiorul unui paraboloid de rotaţie în jurul axei Oz, limitat de planul $z=2$. Avem următoarea reprezentare pentru V:



Avem

$$I = \iiint\limits_V z^2 dxdydz = \iint\limits_D \left(\int_{z_1}^{z_2} z^2 dz \right) dxdy,$$

unde $D: \ x^2 + y^2 \le 4, \ z = 0$, iar $z_1 = \dfrac{x^2+y^2}{2}, \ z_2 = 2$.

$$I = \frac{1}{3} \iint\limits_D z^3 \Big|_{\frac{x^2+y^2}{2}}^{2} dxdy = \frac{1}{3} \iint\limits_D \left(8 - \frac{(x^2+y^2)^3}{8} \right) dxdy.$$

Trecând la coordonate polare, se obţine

$$I = \frac{1}{3} \iint\limits_\Delta \left(8\rho - \frac{\rho^7}{8} \right) d\rho d\theta,$$

unde $\Delta = \{(\rho, \theta) \, | 0 \le \rho \le 2, \ 0 \le \theta \le 2\pi\}$. Mai departe,

$$I = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \left(8\rho - \frac{\rho^7}{8} \right) d\rho = \frac{2\pi}{3} \left(4\rho^2 - \frac{\rho^8}{64} \right) \Big|_0^2 = 8\pi.$$

■

Exerciţiul 12.1.5. *Să se calculeze*

$$I = \iint\limits_S 2zx^2y \, dydz + z^2 dzdx + xyz^2 dydx$$

folosind formula lui Gauss-Ostrogradski, unde $S: \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \\ z \ge 0. \end{cases}$.

Soluţie. Reamintim **formula integrală Gauss-Ostrogradski**

$$\iint\limits_S P \, dydz + Q \, dxdz + R \, dxdy = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz,$$

unde S mărgineşte corpul V. În acest caz: $P(x,y,z) = 2zx^2y; \ Q(x,y,z) = z^2; \ R(x,y,z) = xyz^2$ şi

$$I = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz = \iiint\limits_V 6xyz \, dxdydz$$

unde V este interiorul elipsoidului pentru $z \geq 0$. Mai departe,

$$I = 6 \iint\limits_D xy \left(\int_0^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} z\,dz \right) dxdy = 6 \iint\limits_D xy \cdot \frac{z^2}{2} \Big|_0^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} dxdy = 3c^2 \iint\limits_D xy \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) dxdy,$$

unde $D : \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1 \\ z = 0 \end{cases}$.

Trecem la coordonate polare generalizate $\begin{cases} x = a\rho\cos\theta \\ y = b\rho\sin\theta \end{cases}$, jacobianul transformării fiind $J = ab\rho$. Astfel, integrala devine

$$I = 3c^2 \iint\limits_\Delta ab\rho^2 \sin\theta\cos\theta(1-\rho^2)ab\rho\, d\rho d\theta$$

unde $\Delta = \{(\rho, \theta)\,|0 \leq \rho \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$. În continuare avem:

$$I = 3c^2 \int_0^{2\pi} \sin\theta\cos\theta\, d\theta \int_0^1 a^2b^2\rho^2(1-\rho^2)\rho\, d\rho; \qquad I = \frac{3c^2}{2}\left(-\frac{\cos 2\theta}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} \int_0^1 a^2b^2\rho^3(1-\rho^2)d\rho = 0.$$

■

12.2 Exerciţii propuse cu indicaţii şi răspunsuri

Exerciţiul 12.2.1. *Să se calculeze*

$$I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz,$$

unde $V :\ x^2+y^2+z^2 \leq az$.

Indicaţie. Domeniul este interiorul unei sfere cu centrul în $A\left(0, 0, \frac{a}{2}\right)$ şi rază $R = \dfrac{a}{2}$. Se utilizează coordonatele sferice. ■

Răspuns. $I = \dfrac{\pi a^4}{10}$. ■

Exerciţiul 12.2.2. *Să se calculeze*

$$I = \iiint\limits_V xyz\, dxdydz,\ \textit{unde } V : \begin{cases} 0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq b \\ 0 \leq z \leq c \end{cases}.$$

Indicaţie. Domeniul V este simplu în raport cu axa Oz. ■

Răspuns.

$$I = \frac{a^2b^2c^2}{8}.$$

■

Exercițiul 12.2.3. *Să se calculeze*

$$I = \iiint_V z\,dxdydz$$

unde V *este corpul mărginit de suprafața conică* $z = \frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}$ *și planul* $z = h$, *cu* $h > 0$.

Indicație. Volumul V este simplu în raport cu axa Oz. ■

Răspuns. $I = \frac{\pi R^2 h^2}{4}$. ■

Exercițiul 12.2.4. *Să se calculeze masa corpului mărginit de elipsoidul* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ *știind că densitatea lui variază după legea* $\rho = k|z|$.

Indicație. Masa solidului este $M = \iiint_V k|z|dxdydz$. ■

Răspuns. $M = \frac{k\pi abc^2}{2}$. ■

Exercițiul 12.2.5. *Folosind formula lui Gauss-Ostrogradski să se calculeze integrala de suprafață*

$$I = \iint_S x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy,$$

unde S *este fața exterioară a sferei* $x^2+y^2+z^2=a^2$.

Indicație. În formula lui Gauss-Ostrogradski $P(x,y,z)=x^3,\ Q(x,y,z)=y^3,\ R(x,y,z)=z^3$. ■

Răspuns. $I = \frac{12\pi a^5}{5}$. ■

12.3 Întrebări de autoevaluare

1°. Să se scrie formula de calcul a unei integrale triple când domeniul de integrare este simplu în raport cu una din axele de coordonate. Enunțați definiția integralei triple. ■

2°. Enunțați proprietățile integralei triple. ■

3°. Demonstrați formula integrală Gauss-Ostrogradski. ■

4°. Ce seminificație au numerele:

$$I_x = \rho_0 \iiint_V (y^2+z^2)dV;\ I_{xy} = \iiint_V \rho z^2 dV;\ I_O = \rho_0 \iiint_V (x^2+y^2+z^2)dV\ ?$$

■

5°. Care este formula schimbării de variabile într-o integrală triplă când se trece la coordonate polare generalizate? Dar când se trece la coordonatele cilindrice? ■

Capitolul 13

MC. 13 – Elemente de teoria câmpurilor

13.1 Exerciţii rezolvate

Exerciţiul 13.1.1. *Dacă:*

- $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ *este* ***vectorul de poziţie al unui punct*** *oarecare* $M(x, y, z)$ *din* ***spaţiul afin Euclidian tridimensional*** $\mathbb{E}^3$;
- $r = \|\mathbf{r}\| = \sqrt{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ *este* ***norma*** *sau* ***lungimea*** *vectorului* $\mathbf{r}$;
- $\varphi(r)$ *este un câmp scalar diferenţiabil care depinde compus de variabilele* x, y, z *prin intermediul lui* r;
- $\mathbf{a}$ *este un vector constant;*
- $\mathbf{v}$ *este un câmp vectorial oarecare diferenţiabil;*
- $\boldsymbol{\nabla} = \dfrac{\partial}{\partial x}\,\mathbf{i} + \dfrac{\partial}{\partial y}\,\mathbf{j} + \dfrac{\partial}{\partial z}\,\mathbf{k}$ *este* ***operatorul lui Hamilton,***

atunci au loc egalităţile:

$$\begin{aligned}
&\mathit{grad}\, r = \boldsymbol{\nabla} r = \frac{\mathbf{r}}{r}; \quad \mathit{grad}\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}) = \mathbf{a}; \qquad \mathit{grad}\,\varphi(r) = \varphi'(r)\frac{\mathbf{r}}{r};\\
&\mathit{div}\,\mathbf{r} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{r} = 3; \quad \mathit{rot}\,\mathbf{r} = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{r} = \mathbf{0}; \quad (\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{r} = \mathbf{v}, \qquad \boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{r}) = 0.
\end{aligned} \tag{13.1}$$

Soluţie. Găsim

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad} r &= \operatorname{grad}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathbf{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathbf{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathbf{k} =\\
&= \frac{x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{\mathbf{r}}{r};\\
\operatorname{grad}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}) &= \operatorname{grad}(a_1 x + a_2 y + a_3 z) = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} = \mathbf{a};\\
\operatorname{grad}\varphi(r) &= \frac{\partial}{\partial x}\varphi(r)\,\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\varphi(r)\,\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\varphi(r)\,\mathbf{k} = \varphi'(r)\Big(\frac{\partial r}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial r}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial r}{\partial z}\mathbf{k}\Big) = \varphi'(r)\frac{\mathbf{r}}{r};
\end{aligned}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1+1+1 = 3;$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \mathbf{0};$$

$$(\mathbf{v}\boldsymbol{\nabla})\mathbf{r} = \Big(v_1\frac{\partial}{\partial x} + v_2\frac{\partial}{\partial y} + v_3\frac{\partial}{\partial z}\Big)\mathbf{r} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k} = \mathbf{v};$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{r} = (a_2 z - a_3 y)\mathbf{i} + (a_3 x - a_1 z)\mathbf{j} + (a_1 y - a_2 x)\mathbf{k} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{\nabla}\mathbf{a}\times\mathbf{r} = \frac{\partial}{\partial x}(a_2 z - a_3 y) + \frac{\partial}{\partial y}(a_3 x - a_1 z) + \frac{\partial}{\partial z}(a_1 y - a_2 x) = 0.$$

Întrucât rezultatele (13.1) sunt întâlnite frecvent în aplicaţii, se recomandă memorarea lor. ■

Exerciţiul 13.1.2. *Se dă câmpul scalar*

$$\varphi(M) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})^n + \frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}}{r^2} + \ln r,$$

unde $\mathbf{a}$ *şi* $\mathbf{b}$ *sunt vectori constanţi,* $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ *este* ***vectorul de poziţie*** *al punctului* $M(x,y,z)\in\mathbb{E}^3$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ *este* ***norma*** *sau* ***lungimea*** *vectorului* $\mathbf{r}$, *iar* $n \geq 1$ *este un număr natural.*

a) Să se calculeze $(\operatorname{grad}\varphi)(M)$.

b) Pentru $n=1$, $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$ *şi* $\mathbf{b} = \mathbf{j} - \mathbf{k}$ *să se găsească* ***unghiul*** *dintre vectorii* $(\operatorname{grad}\varphi)(A)$ *şi* $(\operatorname{grad}\varphi)(B)$, *unde punctele* A *şi* B *au coordonatele* $A(1,1,0)$ *şi* $B(-1,0,1)$.

Soluţie. Gradientul câmpului scalar $\varphi(M)$ este vectorul

$$(\operatorname{grad}\varphi)(M) = n(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})^{n-1}\mathbf{a} + \frac{1}{r^2}(\mathbf{b}+\mathbf{r}) - \frac{2\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}}{r^4}\mathbf{r},$$

din care, pentru $n=1$, $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$ şi $\mathbf{b} = \mathbf{j} - \mathbf{k}$ se obţine

$$(\operatorname{grad}\varphi)(A) = 2\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j} - \frac{1}{2}\mathbf{k},\quad (\operatorname{grad}\varphi)(B) = -\frac{1}{2}\mathbf{j} + \frac{1}{2}\mathbf{k}.$$

Vectorii găsiţi sunt **ortogonali** deoarece produsul lor scalar este nul. ■

Exerciţiul 13.1.3. *Să se determine funcţia reală de o variabilă reală* $x\mapsto\varphi(x)$ *astfel încât câmpul vectorial*

$$\mathbf{v}(x,y,z) = x\varphi(x)\,\mathbf{i} + y\varphi(x)\,\mathbf{j} + x^2 z\,\mathbf{k}$$

să fie ***solenoidal****. Pentru* φ *astfel determinat să se determine* ***rotorul*** *câmpului vectorial* $\mathbf{v}$.

Soluţie. Divergenţa câmpului vectorial $\mathbf{v}(x,y,z)$ este

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v} = x\varphi'(x) + 2\varphi(x) + x^2.$$

Impunând condiţia ca $\mathbf{v}$ să fie câmp vectorial solenoidal, ceea ce înseamnă $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v} = 0,$ ajungem la ecuaţia diferenţială liniară şi neomogenă de ordinul întâi

$$\varphi'(x) + \frac{2}{x}\varphi(x) = -x$$

cu **soluţia generală**

$$\varphi(x) = \frac{C}{x^2} - \frac{x^2}{4}.$$

După înlocuirea funcţiei φ în expresia câmpului vectorial $\mathbf{v}$ se obţine

$$\mathbf{v}(x,y,z) = \Big(\frac{C}{x} - \frac{x^3}{4}\Big)\mathbf{i} + y\Big(\frac{C}{x^2} - \frac{x^2}{4}\Big)\mathbf{i} + x^2 z\,\mathbf{k}. \tag{13.2}$$

Rotorul câmpului vectorial (13.2) se determină folosind

$$\operatorname{rot}\mathbf{v} = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P(x,y,z) & Q(x,y,z) & R(x,y,z) \end{vmatrix}, \tag{13.3}$$

unde funcţiile P, Q şi R sunt coordonatele câmpului vectorial

$$P(x,y,z) = \frac{C}{x} - \frac{x^3}{4},\quad Q(x,y,z) = y\Big(\frac{C}{x^2} - \frac{x^2}{4}\Big),\quad R(x,y,z) = x^2 z. \tag{13.4}$$

Din (13.3) şi (13.4) rezultă

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{v} = -2xz\,\mathbf{j} - y\Big(\frac{2C}{x^3} - \frac{x}{2}\Big)\mathbf{k}.$$

■

Exerciţiul 13.1.4. *Se dă câmpul scalar* $\varphi(x,y,z) = x^2y^2z^2$. *Se cer liniile de câmp ale câmpului vectorial* $\mathbf{v} = \boldsymbol{\nabla}\varphi = grad\,\varphi$ *şi suprafaţa de câmp care trece prin curba*

$$\Gamma:\quad \begin{cases} x = 1 \\ y^4 + z^4 = 1. \end{cases}$$

Soluţie. Se găseşte

$$\mathbf{v} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{k} = 2xy^2z^2\,\mathbf{i} + 2x^2yz^2\,\mathbf{j} + 2x^2y^2z\,\mathbf{k}.$$

Sistemul simetric care dă liniile de câmp este

$$\frac{dx}{2xy^2z^2} = \frac{dy}{2x^2yz^2} = \frac{dz}{2x^2y^2z}.$$

Din primele două rapoarte se obţine combinaţia integrabilă $xdx = ydy$ din care deducem prima integrală primă $x^2 - y^2 = C_1$.

A doua integrală primă se obţine similar considerând primul si ultimul raport. Găsim $x^2 - z^2 = C_2$.

Din punct de vedere geometric prima integrală primă reprezintă o familie de **cilindri hiperbolici** cu **generatoarele** paralele cu axa Oz, în timp ce a doua este o familie de cilindri hiperbolici cu generatoarele paralele cu axa Oy.

Ansamblul celor două integrale prime reprezintă ecuaţiile liniilor de câmp

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = C_1 \\ x^2 - z^2 = C_2 \end{cases}$$

O linie de câmp este o curbă rezultată din intersecţia unui cilindru hiperbolic cu generatoarele paralele cu axa Oz cu un cilindru hiperbolic având generatoarele paralele cu axa Oy.

Liniilor de câmp le impunem să treacă prin curba Γ pentru a genera suprafaţa de câmp căutată. Ajungem la sistemul de patru ecuaţii cu trei necunoscute

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = C_1 \\ x^2 - z^2 = C_2 \\ x = 1 \\ y^4 + z^4 = 1. \end{cases}$$

Pentru ca acest sistem să aibă soluţii, constantele C_1 şi C_2 trebuie să fie legate prin **relaţia de condiţie** sau **condiţia de compatibilitate**

$$(1 - C_1)^2 + (1 - C_2)^2 = 1.$$

Înlocuind $C_1 = x^2 - y^2$ şi $C_2 = x^2 - z^2$ obţinem **ecuaţia carteziană implicită a suprefeţei** de câmp

$$(1 - x^2 + y^2)^2 + (1 - x^2 + z^2)^2 - 1 = 0$$

în care recunoaştem o **suprafaţă algebrică de ordinul patru**. ■

Exerciţiul 13.1.5. *Se dă câmpul vectorial* $\mathbf{v}(x, y, z) = \varphi(r)grad\,\varphi(r)$, *unde* φ *este o funcţie reală diferenţiabilă, iar* $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ *este norma vectorului de poziţie* $\mathbf{r}$ *a unui punct arbitrar* $M \in \mathbb{E}^3$. *Se cere:*

a) *să se calculeze* $div\,\mathbf{v}$;

b) *să se arate că* $\mathbf{v}$ *este un **câmp vectorial irotaţional;***

c) *în ipoteza că* $\varphi(r) = -\dfrac{1}{r}$, *să se găsească punctele* M *pentru care* $div\,\mathbf{v} = 1$.

Soluţie. Pentru primele două puncte folosim formulele:

$$\mathrm{div}\,(\varphi\,\mathbf{u}) \quad = \quad \varphi\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} + \mathbf{u}\cdot \mathrm{grad}\,\varphi; \tag{13.5}$$

$$\mathrm{rot}\,(\varphi\,\mathbf{u}) \quad = \quad \varphi\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u} - \mathbf{u}\times \mathrm{grad}\,\varphi, \tag{13.6}$$

unde φ este un câmp scalar, iar $\mathbf{u}$ este un câmp vectorial, ambele diferenţiabile pe domeniile lor de definiţie.

În cazul acestui exerciţiu, câmpul vectorial $\mathbf{u} = \mathrm{grad}\,\varphi$.

Aplicând (13.5), avem

$$\mathrm{div}\,(\varphi(r)\,(\mathrm{grad}\,\varphi)(r)) = \varphi(r)\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\varphi(r) + \mathrm{grad}\,\varphi(r)\cdot \mathrm{grad}\,\varphi(r).$$

Însă $\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\varphi(r) = \nabla^2\varphi(r)$, unde ∇^2 este **operatorul lui Laplace**

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Se obţine

$$\mathrm{div}\,(\varphi(r)\,(\mathrm{grad}\,\varphi)(r)) = \varphi(r)\nabla^2\varphi(r) + \|\mathrm{grad}\,\varphi(r)\|^2. \tag{13.7}$$

Pentru al doilea punct aplicăm (13.6) şi găsim

$$\mathrm{rot}\,(\varphi(r)\mathrm{grad}\,\varphi(r)) = \varphi(r)\,\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\varphi(r) - \mathrm{grad}\,\varphi(r)\times \mathrm{grad}\,\varphi(r).$$

Însă, $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\varphi(r) = \mathbf{0}$, iar $\mathrm{grad}\,\varphi(r)\times \mathrm{grad}\,\varphi(r) = \mathbf{0}$, prima fiind evidentă dacă se foloseşte (13.3), a doua rezultând din faptul că produsul vectorial a doi vectori coliniari este vectorul nul. Aşadar,

$$\mathrm{rot}\,(\varphi(r)\mathrm{grad}\,\varphi(r)) = \mathbf{0},$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Pentru cel de al treilea punct folosim (13.7) în care $\varphi(r) = -\dfrac{1}{r}$. Avem

$$\nabla^2\Big(-\frac{1}{r}\Big) = \operatorname{div}\operatorname{grad}\Big(-\frac{1}{r}\Big) = -\operatorname{div}\Big(-\frac{\operatorname{grad} r}{r^2}\Big) = \operatorname{div}\Big(\frac{\mathbf{r}}{r^3}\Big). \tag{13.8}$$

Calculând ultimul termen din (13.8) folosind formula (13.5), obţinem

$$\operatorname{div}\Big(\frac{\mathbf{r}}{r^3}\Big) = \frac{1}{r^3}\operatorname{div}\mathbf{r} + \mathbf{r}\cdot\operatorname{grad}\Big(\frac{\mathbf{r}}{r^3}\Big) = \frac{3}{r^3} + \mathbf{r}\cdot\Big(\frac{-3r^2\dfrac{\mathbf{r}}{r}}{r^6}\Big) = \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^3} = 0. \tag{13.9}$$

Din (13.7) şi (13.9) rezultă $\operatorname{div}\mathbf{v} = \Big\|\operatorname{grad}\Big(-\dfrac{1}{r}\Big)\Big\|^2 = \Big\|-\dfrac{\mathbf{r}}{r^3}\Big\|^2 = \dfrac{1}{r^4}$.

Din condiţia $\operatorname{div}\mathbf{v} = 1$ rezultă $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, ceea ce înseamnă că punctele $M(x, y, z)$ se află pe sfera de rază 1 cu centrul în origine. ■

13.2 Exerciţii propuse cu indicaţii şi răspunsuri

Exerciţiul 13.2.1. *Se dau câmpurile vectoriale:*

$$\mathbf{v}(x,y,z) = \Big(r + \varphi(r)\Big)\mathbf{r}; \quad \mathbf{v}(x,y,z) = \frac{\varphi^2(r)}{r^2}(\mathbf{r} + \mathbf{a}\times\mathbf{r}); \quad \mathbf{v}(x,y,z) = \varphi(r)\mathbf{r} + (r + \varphi(r))(\mathbf{a}\times\mathbf{r}).$$

unde: $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ este vectorul de poziţie al punctului $M(x,y,z) \in \mathbb{E}^3$; $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ este norma vectorului $\mathbf{r}$; $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ este un vector constant; iar $\varphi(r)$ este o funcţie diferenţiabilă.

Pentru fiecare dintre aceste câmpuri vectoriale să se determine funcţia φ astfel încât $\mathbf{v}$ să fie câmp vectorial solenoidal.

Indicaţie. În toate cazurile se impune condiţia $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$. În fiecare caz această condiţie conduce la câte o **ecuaţie diferenţială**. De exemplu, prima ecuaţie diferenţială este $\varphi' + \dfrac{3}{r}\varphi = -4$, iar a treia are forma $3\varphi + r\varphi' = 0$ care este o **ecuaţie diferenţială cu variabile separabile**. ■

Răspuns. Pentru fiecare din cele trei câmpuri vectoriale funcţia φ este:

$$\varphi(r) = \frac{C}{r^3} - r; \qquad \varphi(r) = \frac{C}{\sqrt{r}}; \qquad \varphi(r) = \frac{C}{r^3}.$$

În toate cazurile C este o **constantă reală de integrare**, arbitrară. ■

Exerciţiul 13.2.2. *Se dă câmpul vectorial $\mathbf{v}(x,y,z) = \varphi(r)\mathbf{r}$, unde $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ este vectorul de poziţie al punctului $M(x,y,z) \in \mathbb{E}^3$, iar $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ este norma sa.*

a) Să se arate că $\mathbf{v}$ este câmp vectorial irotaţional, sau ***lamelar****;*

b) Să se găsească funcţia φ astfel încât $\operatorname{div}\mathbf{v} = 3r^2 + \mathbf{r}\cdot\operatorname{grad}\varphi(r)$;

c) În ipoteza că $\varphi(r) = \dfrac{1}{r}$, să se determine funcţia $f(M)$ astfel încât $\mathbf{v}(M) = \operatorname{grad} f(M)$.

Indicaţie. Se arată că $\operatorname{rot}\mathbf{v} = \mathbf{0}$. ■

n**Răspuns**. $\varphi(r) = r^2 = x^2 + y^2 + z^2$; $f(M) = f(x,y,z) = r + C$, unde C este constantă arbitrară. ■

Exerciţiul 13.2.3. *Se dau: câmpul scalar* $\varphi(x, y, z) = xy + yz + zx$; *punctul* $A(1, -1, 2) \in I\!E^3$; *punctul* $B(3, 1, 1) \in I\!E^3$. *Se cere:*

a) *ecuaţia* ***suprafeţei de nivel*** *care trece prin punctul* A;

b) *derivata câmpului scalar* φ, *în punctul* A, *după direcţia* $\overrightarrow{AB}$;

c) *derivatele câmpului scalar* φ *după direcţiile axelor de coordonate* Ox, Oy, Oz;

d) *să se găsească direcţia după care derivata câmpului scalar* φ *în punctul* A *este maximă şi să se calculeze valoarea acestei derivate;*

e) *să se calculeze produsul vectorial al vectorilor* $(grad\,\varphi)(A)$ *şi* $(grad\,\varphi)(B)$.

Răspuns.

a) Suprafaţa de nivel, de ecuaţie $xy + yz + zx + 1 = 0$, este o **cuadrică** adică o **suprafaţă algebrică de ordinul doi** ;

b) $\overrightarrow{AB} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\quad \mathbf{s} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{\parallel \overrightarrow{AB} \parallel} = \dfrac{2}{3}\mathbf{i} + \dfrac{2}{3}\mathbf{j} - \dfrac{1}{3}\mathbf{k}$, $\quad \dfrac{d\varphi}{d\mathbf{s}}(A) = \dfrac{8}{3}$;

c) $\dfrac{d\varphi}{d\mathbf{i}}(A) = 1$; $\quad \dfrac{d\varphi}{d\mathbf{j}}(A) = 3$; $\quad \dfrac{d\varphi}{d\mathbf{k}}(A) = 0$;

d) derivata este maximă după direcţia normalei $\mathbf{n}$ în punctul A la suprafaţa de nivel. Avem

$$\mathbf{N} = (\text{grad}\,\varphi)(A) = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{N}}{\|\mathbf{N}\|} = \frac{1}{\sqrt{10}}\mathbf{i} + \frac{3}{\sqrt{10}}\mathbf{j} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\varphi}{d\mathbf{n}}(A) = \sqrt{10};$$

c) $(\text{grad}\,\varphi)(A) = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $\quad (\text{grad}\,\varphi)(B) = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k} \quad \Longrightarrow \quad (\text{grad}\,\varphi)(A) \times (\text{grad}\,\varphi)(B) = 12\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}.$

■

Exerciţiul 13.2.4. *Se cer liniile de câmp ale câmpului vectorial*

$$\mathbf{v}(x, y, z) = (x^2 - yz)\mathbf{i} + (y^2 - zx)\mathbf{j} + (z^2 - xy)\mathbf{k}.$$

Indicaţie. Se scrie **sistemul simetric al liniilor de câmp**

$$\frac{dx}{x^2 - yz} = \frac{dy}{y^2 - zx} = \frac{dz}{z^2 - xy}$$

şi se determină două **integrale prime independente funcţional**. Acestea pot fi:

$$\frac{x - y}{y - z} = C_1; \quad \frac{y - z}{z - x} = C_2$$

■

Răspuns. Liniile de câmp sunt dreptele în spaţiu

$$\begin{cases} x - (1 + C_1)y + C_1 z = 0 \\ C_2 x + y - (1 + C_2)z = 0. \end{cases}$$

■

Exercițiul 13.2.5. *Să se determine funcția $\varphi(x)$ astfel încât câmpul vectorial*

$$\mathbf{v}(M) = 2x\varphi(x)\mathbf{i} - y\varphi(x)\mathbf{j} + 6x^2z\mathbf{k}$$

să fie solenoidal.

Indicație. Din condiția ca $(\operatorname{div}\mathbf{v})(M) = 0$ rezultă **ecuația diferențială liniară neomogenă**

$$\varphi'(x) + \frac{1}{2x}\varphi(x) = -3x.$$

Se află întâi soluția ecuației omogene $\varphi'(x) + \dfrac{1}{2x}\varphi(x) = 0$, care dacă se scrie în forma $\dfrac{d\varphi}{\varphi} + \dfrac{1}{2}\dfrac{dx}{x} = 0$. Se determină $\varphi_o = \dfrac{C}{\sqrt{x}}$, unde C este o constantă arbitrară. Se caută apoi soluția ecuației neomogene în forma $\varphi(x) = \dfrac{u(x)}{\sqrt{x}}$. Se găsește $u(x) = C - \dfrac{6}{5}x^2\sqrt{x}$ și apoi funcția $\varphi(x)$. ■

Răspuns. $\varphi(x) = \dfrac{C}{\sqrt{x}} - \dfrac{6}{5}x^2$. ■

13.3 Întrebări de autoevaluare

1°. Definiți noțiunile: **câmp vectorial potențial** ; **potențialul scalar al unui câmp vectorial**; **câmp conservativ de forțe**; **funcție de forță**; **câmp gravitațional** și demonstrați că *un câmp gravitațional este un câmp conservativ de forțe*. Determinați funcția de forță a câmpului gravitațional.

Indicație. Forța $\mathbf{F}$ cu care este atras de către Pământ un punct material M de vector de poziție $\mathbf{r}$ este

$$\mathbf{F}(M) = -\frac{C}{r^3}\mathbf{r},$$

unde C este o constantă pozitivă, iar r este norma vectorului $\mathbf{r}$. Funcția de forță U se determină din definiția acesteia, adică din $\mathbf{F}(M) = (\operatorname{grad} U)(M)$. ■

Răspuns. Se găsește $U(M) = \dfrac{C}{r}$. ■

2°. Presupunem că $\mathbf{v} : D \to I\!R^3$ este un câmp vectorial continuu diferențiabil pe domeniul $D \subset I\!R^3$ care are **coordonatele** $v_1(x, y, z)$, $v_2(x, y, z)$ și $v_3(x, y, z)$.

Demonstrați că următoarele afirmații sunt echivalente:

- $\mathbf{v}$ este câmp vectorial potențial;
- integrala curbilinie $\displaystyle\int_C \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r} = \int_C v_1(x, y, z)dx + v_2(x, y, z)dy + v_3(x, y, z)dz$ este **independentă de drum** pe D;
- **expresia diferențială**

$$\omega = \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r} = v_1(x, y, z)dx + v_2(x, y, z)dy + v_3(x, y, z)dz$$

este **diferențială totală** pe D.

■

3°. Demonstrați că un câmp vectorial potențial $\mathbf{v} : D \subset I\!R^3 \to I\!R^3$ al cărui potențial $\varphi \in C^2(D)$ este câmp

vectorial lamelar. ■

4°. Scrieţi sub diverse forme **formula integrală Gauss–Ostrogradski** şi demonstraţi că

$$\iint_S n_i x_j \, d\sigma = \delta_{ij} \operatorname{vol} \mathrm{V},$$

unde V este un **domeniu cubabil**, $\operatorname{vol} \mathrm{V}$ este **volumul domeniului** V, S este este **frontiera** lui V care este o **suprafaţa închisă netedă pe porţiuni**, n_1, n_2, n_3 sunt **cosinuşii directori** ai **normalei exterioare** $\mathbf{n}$ într–un punct regulat de coordonate x_1, x_2, x_3 al frontierei S. ■

5°. Scrieţi:

- **formula integrală a gradientului**;
- **formula integrală a rotorului**;
- **prima identitate a lui Green**;
- **a doua identitate a lui Green**.

■

Index de noţiuni

Bibliografie

[1] Adams, Robert, A. – *Calculus. A complete Course,* Fourth ed., Addison–Wesley, 1999

[2] Baranenkov, G., Chostak, R., Démidovitch, B., Efimenko, V., Frolov, S, Kogan, S., Lountz, G, Porchnéva, E., Sytchéva, E., Yanpolski, A. – *Recueil d'exercices et de problemes d'analyse mathématique*, sous la direction de Démidovitch, B., cinqueme édition revue, Editions Mir, Moscou, 1974.

[3] Bermant, A. F., Aramanovich, I. G. – *Mathematical Analysis. A Brief Course for Engineering Students*, Mir Publishers, Moscow, 1986.

[4] Calistru, N., Ciobanu, Gh. – *Curs de analiză matematică, Vol. I*, Institutul Politehnic Iaşi, Rotaprint, 1988.

[5] Chiriţă, Stan – *Probleme de matematici superioare*, Editura Academiei Române, Bucureşti, 1989.

[6] Colojoară, Ion – *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983.

[7] Corduneanu, Silvia – Otilia –*Capitole de analiză matematică*, Editura MATRIX ROM, Bucureşti, 2011.

[8] Craiu, M., Tănase, V. – *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1980.

[9] Crăciun, A., Crăciun, I., Ispas, M. – *Analiză matematică. Partea I. Culegere de probleme de calcul diferenţial*, Editura POLITEHNIUM, Iaşi, 2004.

[10] Crăciun, I., Procopiuc, Gh., Neagu, A., Fetecău, C. – *Algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială şi programare liniară*, Institutul Politehnic Iaşi, Rotaprint, 1984.

[11] Crăciunaş, Petru Teodor – *Mathematical Analysis*, Polytechnic Institute of Iassy, Faculty of civil engineering, Iassy 1992.

[12] Cruceanu, Vasile – *Algebră liniară şi geometrie*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1973.

[13] Dieudonné, J. – *Fondements de l'analyse moderne*, Gauthier–Villars, Paris 1963.

[14] Dixon, C. – *Advanced Calculus*, John Wiley & Sons, Chichester·New York·Brisbane·Toronto 1981.

[15] Drăguşin, L., Drăguşin, C., Câşlan, C. – *Analiză matematică. Calcul diferenţial*, Editura TEORA, Bucureşti, 1993.

[16] Flondor, P., Stănăşilă, O. – *Lecţii de analiză matematică şi exerciţii rezolvate*, Ediţia a II–a, Editura ALL, Bucureşti, 1996.

[17] Fulks, Watson – *Advanced calculus: an introduction to analysis*, Third Edition, John Wiley & Sons, New York 1978.

[18] Găină, S., Câmpu, E., Bucur, Gh.– *Culegere de probleme de calcul diferenţial şi integral Vol. II*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1966.

[19] Gheorghiu, N., Precupanu, T. – *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1979.

[20] Hewitt, E., Stromberg, K. – *Real and Abstract Analysis. A modern treatment of the theory of functions of a real variable*, Springer–Verlag Berlin Heidelberg New York, 1965.

[21] Marinescu, Gheorghe – *Analiză matematică, vol. I, Ediţia a V–a,* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1980.

[22] Nicolescu, M., Dinculeanu, N., Marcus, S. – *Analiză matematică, vol. I, ediţia a patra*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1971.

[23] Olariu, Valter – *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.

[24] Olariu, V., Halanay, A., Turbatu, S. – *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983.

[25] Precupanu, Anca – *Bazele analizei matematice*, Editura Universităţii *Al. I. Cuza*, Iaşi, 1993.

[26] Roşculeţ, Marcel – *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1984.

[27] Sburlan, Silviu – *Principiile fundamentale ale analizei matematice*, Editura Academiei Române, Bucureşti, 1991.

[28] Sireţchi, Gheorghe – *Calcul diferenţial şi integral, Vol. I, II,* Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1985.

[29] Smirnov, Vladimir – *Cours de mathématiques supérieures, tome I, Deuxiéme Éditions,* Mir, Moscou 1972.

[30] Stănăşilă, Octavian – *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.

[31] Sykorski, Roman – *Advanced Calculus. Functions of several variables,* PWN–Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1969.

[32] Thomas, Jr., G. B., Finney, R. L. – *Calculus and Analytic Geometry,* 7th Edition, Addison–Wesley Publishing Company, 1988.